

Příklad 1. Pro komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 2 - i$ spočítejte $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$ a $|z_2|$. Jaký je geometrický význam sčítání a násobení komplexních čísel?

Příklad 2. Ukažte, že komplexně sdružená čísla a absolutní hodnoty komplexních čísel splňují následující vlastnosti:

- a) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Příklad 3. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A | b)$ byl:

- a) ∞ pro každé b ,
- b) 1 pro každé b ,
- c) 0 nebo 1 v závislosti na b ,
- d) 0 nebo ∞ v závislosti na b .

Příklad 4. Vyřešte Gaussovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic a určete hodnost matic:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \end{array} \right).$$

Jaká řešení dostaneme pro pravou stranu $b = (0, 0, 0)$?

Příklad 5. Ukažte, že elementární řádkové úpravy

- a) přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému pro $i \neq j$,
- b) výměna i -tého a j -tého řádku,

se dají vyjádřit pomocí

- c) vynásobení i -tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
- d) přičtení j -tého řádku k i -tému.

Příklad 6. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Příklad 7. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Příklad 1. Pro komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 2 - i$ spočítejte $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$ a $|z_2|$. Jaký je geometrický význam sčítání a násobení komplexních čísel?

Příklad 2. Ukažte, že komplexně sdružená čísla a absolutní hodnoty komplexních čísel splňují následující vlastnosti:

- a) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Příklad 3. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A | b)$ byl:

- a) ∞ pro každé b ,
- b) 1 pro každé b ,
- c) 0 nebo 1 v závislosti na b ,
- d) 0 nebo ∞ v závislosti na b .

Příklad 4. Vyřešte Gaussovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic a určete hodnost matic:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \end{array} \right).$$

Jaká řešení dostaneme pro pravou stranu $b = (0, 0, 0)$?

Příklad 5. Ukažte, že elementární řádkové úpravy

- a) přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému pro $i \neq j$,
- b) výměna i -tého a j -tého řádku,

se dají vyjádřit pomocí

- c) vynásobení i -tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
- d) přičtení j -tého řádku k i -tému.

Příklad 6. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Příklad 7. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?