

Příklad 1. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A | b)$ byl:

- a) ∞ pro každé b ,
- b) 1 pro každé b ,
- c) 0 nebo 1 v závislosti na b ,
- d) 0 nebo ∞ v závislosti na b .

Příklad 2. Ukažte, že elementární řádkové úpravy

- a) přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému pro $i \neq j$,
- b) výměna i -tého a j -tého řádku,

se dají vyjádřit pomocí

- c) vynásobení i -tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
- d) přičtení j -tého řádku k i -tému.

Příklad 3. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Příklad 4. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Příklad 5. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Příklad 6. Najděte:

- a) soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \quad \text{kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R},$$

- b) čtvercovou soustavu s řešením

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) + t \cdot (2, 1, 1), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 1. Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A | b)$ byl:

- a) ∞ pro každé b ,
- b) 1 pro každé b ,
- c) 0 nebo 1 v závislosti na b ,
- d) 0 nebo ∞ v závislosti na b .

Příklad 2. Ukažte, že elementární řádkové úpravy

- a) přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému pro $i \neq j$,
- b) výměna i -tého a j -tého řádku,

se dají vyjádřit pomocí

- c) vynásobení i -tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
- d) přičtení j -tého řádku k i -tému.

Příklad 3. Vyřešte Gauss–Jordanovou eliminací následující soustavy lineárních rovnic:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Příklad 4. Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Příklad 5. Vyřešte lineární soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Příklad 6. Najděte:

- a) soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \quad \text{kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R},$$

- b) čtvercovou soustavu s řešením

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) + t \cdot (2, 1, 1), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$