

## 1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

**Cv. 1.1** Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutujte předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

**Řešení:**

Možností je celá řada:

- *Bod a směrnice přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrnice je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

**Cv. 1.2** Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem  $[3, 2, 1]$  a směrnici  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 0)$ .

**Řešení:**

Normálu získáme například vektorovým součinem směrnic  $(1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, -3)$ . Rovnice má tudíž tvar  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d$ . Absolutní člen  $d$  určíme ze znalosti bodu roviny, tedy  $d = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$ . Rovnice tak je

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Pokud se chceme vyhnout použití vektorového součinu (nebo jej neznáme), budeme uvažovat normálu v obecném tvaru  $(a, b, c)$  a rovnici tak ve tvaru  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ . Protože rovina obsahuje bod  $[3, 2, 1]$ , dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrnice  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 0)$ , které musí být kolmé na normálu, dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – mohou uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení  $a = t$ ,  $b = 2t$ ,  $c = -3t$ ,  $d = 4t$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  je libovolné. Zvolíme například  $t = 1$  (nebo jakékoli jiné nenulové  $t$ ) a máme jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrnic!

**Cv. 1.3** Najděte parametrické vyjádření roviny  $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ .

**Řešení:**

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme  $x_2 = x_3 = 0$  a z rovnice dostaneme  $x_1 = 2$ . Tudíž máme bod  $[2, 0, 0]$ .

Směrnice získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu  $(2, 3, 1)$ . Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například  $(0, 1, -3)$  a  $(1, 0, -2)$ . Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor  $(a, b, c)$  musí být kolmý na normálu, tj.  $2a + 3b + c = 0$ . Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme  $a = 0, b = 1$  a dopočítáme  $c = -3$ , a jako druhé řešení dosadíme  $a = 1, b = 0$  a dopočítáme  $c = -2$ . Opět musíme být trochu opatrní, aby směrnice neudávali stejný směr.

**Cv. 1.4** Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

**Řešení:**

V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru  $t$ .

Například eliminací proměnné  $x_1$  dostaneme rovnici  $x_2 + x_3 = 1$ . Zvolíme  $t = x_3$  jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice  $x_2 + x_3 = 1$  odvodíme  $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$ . Z původní rovnice  $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$  vyjádříme  $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$ .

Výsledek:  $[x_1, x_2, x_3] = [-1 + 2t, 1 - t, t] = [-1, 1, 0] + t(2, -1, 1)$ . To jest, přímka prochází bodem  $[-1, 1, 0]$  a má směrnici  $(2, -1, 1)$ .

**Cv. 1.5** Najděte dvě rovnice, popisující přímku  $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$ .

**Řešení:**

Každá rovnice musí vyhovovat bodu  $[3, 2, 1]$  a její normála musí být kolmá na směrnici  $(1, -1, 1)$ . Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například  $(1, 1, 0)$ , ta je kolmá na směrnici. Normále odpovídá rovnice  $x_1 + x_2 = d$  a ze znalosti bodu  $[3, 2, 1]$  odvodíme  $d = 5$ . Nyní zvolme jinou normálu, například  $(0, 1, 1)$ , která je též kolmá na směrnici. Ta odpovídá rovnici  $x_2 + x_3 = d'$  a ze znalosti bodu  $[3, 2, 1]$  odvodíme  $d' = 3$ . Tudíž výsledkem jsou rovnice  $x_1 + x_2 = 5, x_2 + x_3 = 3$ .

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu  $(1, 0, -1)$ , která vede na rovnici  $x_1 - x_3 = 2$ . Tudíž rovnice  $x_1 + x_2 = 5, x_1 - x_3 = 2$  dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím  $x_1 + x_2 = 5, x_2 + x_3 = 3$  přidali ještě rovnici  $x_1 - x_3 = 2$ , tak soustava  $x_1 + x_2 = 5, x_2 + x_3 = 3, x_1 - x_3 = 2$  sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

**Cv. 1.6** Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

**Řešení:**

Možné polohy přímek:

• *Rovnoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.

Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

• *Totožné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.

Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

• *Různoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.

Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

• *Mimoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.

Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

**Cv. 1.7** Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnici

$$p : [1, 5, 3], (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1], (-1, 2, 2).$$

**Řešení:**

Protože jsou směrnice až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod  $[1, 5, 3]$  přímky  $p$  leží na přímce  $q$ , neboť  $[1, 5, 3] = [3, 1, -1] + t(-1, 2, 2)$  pro  $t = 2$ . Tudíž jsou přímky totožné.

**Cv. 1.8** Najděte kvadratickou funkci, procházející body  $[1, 1]$ ,  $[2, 2]$ ,  $[3, 7]$ .

**Řešení:**

Kvadratická funkce má tvar  $y = ax^2 + bx + c$ . Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1, \quad 4a + 2b + c = 2, \quad 9a + 3b + c = 7,$$

z čehož vypočítáme  $a = 2$ ,  $b = -5$ ,  $c = 4$ . Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$