

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Diskutujte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0 \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Řešení:

Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

S dolní trojúhelníkovou maticí je to stejné. To jest, matice je regulární právě tehdy, když jsou všechny prvky na diagonále nenulové. Zdůvodnění je jednoduché – transpozicí matice ji převedeme na horní trojúhelníkovou matici a uvědomíme si, že transpozice zachovává regularitu.

Cv. 4.2 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Řešení:

Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$ -násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha \frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ 0 & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n - 1$.

Cv. 4.3 Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Elementárními řádkovými úpravami převedeme $(A \mid I_3)$ na redukovaný odstup-

ňovaný tvar:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Máme tedy $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 4.4 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Připomeňme, že elementární operace a příslušné matice jsou:

- (a) Vynásobení i -tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému, přičemž $i \neq j$, lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

i j

- (c) Výměna i -tého a j -tého řádku jde reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij} = \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i j

Řešení:

Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je podle kuchařky na invertování matic. První matici invertujeme takto:

$$\begin{aligned} (E_i(\alpha) \mid I_n) &= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})). \end{aligned}$$

Druhou:

$$\begin{aligned} (E_{ij}(\alpha) \mid I_n) &= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \alpha & & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array} \right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)). \end{aligned}$$

Třetí:

$$\begin{aligned} (E_{ij} \mid I_n) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I_n \mid E_{ij}). \end{aligned}$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu elementárních matic. První matice $E_i(\alpha)$ násobí i -tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i -tého řádku číslem α , což je representováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Druhá matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α -násobek j -tého řádku k i -tému. Inverzní operace je odečtení α -násobku j -tého řádku od i -tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Třetí matice E_{ij} prohazuje i -tý a j -tý řádek. Inverzní operace je tatáž, výměna i -tého a j -tého řádku. Tudíž matice E_{ij} inverzní sama k sobě.

Cv. 4.5 Invertujte matici řádu n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:

Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A | I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A , pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukci dále a po dalších $n - 2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Cv. 4.6 Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Řešení:

S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned} & (I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} \\ &= IA - B^T A^{-1}A + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{distributivita}] \\ &= IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{definice inverze}] \\ &= A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{násobení maticí } I] \\ &= A - B^T + B^T A A^{-1} \quad [\text{transpozice součinu matic}] \\ &= A - B^T + B^T \quad [\text{definice inverze}] \\ &= A. \end{aligned}$$

Celý výraz se tak zjednodušil na matici A .

Cv. 4.7 (a) Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Najděte limitu (pokud nevíte, co je limita, tak použijte intuici)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} AD^k A^{-1}, \quad \text{kde } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

a určete její hodnotu.

(c) Aplikujte předchozí na matici A , jejíž první sloupec i řádek je tvořený jednotkovým vektorem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Řešení:

- (a) Postupujeme matematickou indukci. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože $(ABA^{-1})^1 = AB^1A^{-1}$.

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} (ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1}) \\ &= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\ &= AB^kA^{-1}. \end{aligned}$$

- (b) Podle předchozího bodu máme

$$\begin{aligned} AD^kA^{-1} &= A \begin{pmatrix} 1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n^k} \end{pmatrix} A^{-1} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*}. \end{aligned}$$

Matice má hodnotu 1, neboť je vnějším součinem dvou vektorů.

- (c) Je-li $A_{*1} = e_1$ a $A_{1*} = e_1^T$, pak nutně totéž platí i pro inverzní matici, konkrétně $(A^{-1})_{1*} = e_1^T$. Tudíž

$$\lim_{k \rightarrow \infty} AD^kA^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*} = e_1e_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$