(1) Umění formulace celočíselných programů

Příklad 1.1. Karel, student optimalizace na Univerzitě Karlově, si chce v následujícím semestru zapsat některé z předmětů $p_1, \dots, p_5$. Pomozte Karlovi pomocí podmínek lineárního celočíselného programování modelovat tyto studijní požadavky:

(a) musí si zapsat alespoň dva předměty,

(b) zapíše-li si předmět p_1, musí si také zapsat p_5,

(c) zapíše-li si předmět p_2, nemůže si zapsat p_4,

(d) předmět p_3 si může zapsat, pouze pokud si zapíše také p_1 nebo p_2,

(e) předmět p_4 si může zapsat, pouze pokud si zapíše také p_2 a p_3,

(f) pokud si zapíše 2 nebo 3 předměty z množiny $\{p_3, p_4, p_5\}$, nemůže si zapsat p_2.

Řešení:
Zápis jednotlivých předmětů z množiny $\{p_1, \dots, p_5\}$ můžeme modelovat pomocí binárních proměnných $p_1, \dots, p_5 \in \{0, 1\}$, které lze také interpretovat jako logické proměnné:

(a) $\sum_{i=1}^{5} p_i \geq 2$,

(b) $p_1 \Rightarrow p_5$, tedy $p_1 \leq p_5$,

(c) $p_2 \Rightarrow \neg p_4$, tedy $p_2 \leq 1 - p_4$,

(d) $p_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_2)$, tedy $p_3 \leq p_1 + p_2$,

(e) $p_4 \Rightarrow (p_2 \wedge p_3)$, tedy $p_4 \leq p_2$ a $p_4 \leq p_3$

(f) $(p_3 + p_4 + p_5 \geq 2) \Rightarrow \neg p_2$, tedy $\frac{1}{2}(p_3 + p_4 + p_5 - 1) \leq 1 - p_2$.

Příklad 1.2. Formulujte pomocí lineárních celočíselných podmínek následující omezení:

(a) $x \in \{1, 5, 22, 42, 2021\}$,

(b) $z = \min\{x, y\}$ pro proměnné $x, y \in [-K, K]$,

(c) $y = |x|$ pro proměnnou $x \in [-K, K]$.

Řešení:
Viz Příklad 1.29 ve skriptech.

Příklad 1.3. Navrhněte lineární celočíselný program pro řešení Sudoku.

Řešení:
Přiřazení hodnoty $k \in \{1, \dots, 9\}$ na pozici (i, j) můžeme reprezentovat binární proměnnou $x_{ijk} \in \{0, 1\}$. V každém řádku i a v každém sloupci j se hodnota k vyskytuje právě jedenkrát:

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j, k \in \{1, \dots, 9\},$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i, k \in \{1, \dots, 9\}.$$

V každém bloku 3×3 se hodnota k vyskytuje právě jedenkrát:

$$\sum_{q,r=0}^{2} x_{i+q,j+r,k} = 1 \qquad \forall i,j \in \{1,4,7\},\ \forall k \in \{1,\dots,9\}.$$

Každá pozice obsahuje právě jednu hodnotu:

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,9\}.$$

Navíc požadujeme $x_{ijk} = 1$, pokud se v zadání nachází na pozici (i,j) hodnota k.

Příklad 1.4. Formulujte pomocí lineárních celočíselných podmínek sjednocení k omezených polyedrů zadaných ve tvaru

$$P^i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \le b^i,\ 0 \le x \le u^i\right\}, \quad \text{pro } i \in \{1,\dots,k\}.$$

Řešení:
Viz Příklad 1.32 ve skriptech.

Příklad 1.5. Formulujte následující grafové problémy jako lineární celočíselné programy:

(a) minimální vrcholové pokrytí (t.j. množina vrcholů, kde každá hrana grafu je incidentní alespoň s jedním vrcholem z této množiny),

(b) maximální nezávislá množina (t.j. množina vrcholů, v níž žádné dva vrcholy nejsou spojeny hranou),

(c) barevnost grafu (t.j. nejmenší počet barev potřebný k obarvení vrcholů tak, aby sousední vrcholy neměly stejnou barvu).

Řešení:
Uvažujme graf G s množinou vrcholů V a množinou hran $E \subseteq V \times V$.

(a) Pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme binární proměnnou $x_v \in \{0,1\}$, která určuje, zda daný vrchol patří do pokrytí.

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{v \in V} x_v && && \text{[hledáme minimální pokrytí]}\\
&x_u + x_v \ge 1 && \forall \{u,v\} \in E && \text{[hrana má aspoň 1 vrchol v pokrytí]}\\
&x_v \in \{0,1\} && \forall v \in V &&
\end{aligned}$$

(b) Opět zavedeme binární proměnné $x_v \in \{0,1\}$ určující, zda vrchol $v \in V$ patří do nezávislé množiny.

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{v \in V} x_v && && \text{[hledáme maximální nezávislou množinu]}\\
&x_u + x_v \le 1 && \forall \{u,v\} \in E && \text{[vrcholy v nezávislé množině nesousedí]}\\
&x_v \in \{0,1\} && \forall v \in V &&
\end{aligned}$$

(c) Označme K množinu dostupných barev. Zavedeme proměnné $x_{vk} \in \{0,1\}$ reprezentující přiřazení k-té barvy vrcholu $v \in V$ a proměnné $y_k \in \{0,1\}$ indikující, zda je barva k v obarvení grafu použita.

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{k\in K} y_k && && \text{[hledáme nejmenší počet barev]}\\
&\sum_{k\in K} x_{vk} = 1 && \forall v \in V && \text{[vrchol má právě 1 barvu]}\\
&x_{uk} + x_{vk} \le 1 && \forall \{u,v\} \in E && \text{[sousedící vrcholy mají různou barvu]}\\
&x_{vk} \le y_k && \forall v \in V, k \in K && \text{[barva byla v obarvení použita]}\\
&x_{vk}, y_k \in \{0,1\} && \forall v \in V, k \in K &&
\end{aligned}$$

Příklad 1.6. Formulujte pomocí lineárních celočíselných podmínek po částech lineární funkci $f(x)$ na intervalu $[x_0, x_m]$, přičemž body zlomů jsou $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ a hodnoty ve zlomech jsou $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Viz Příklad 1.31 ve skriptech.

Příklad 1.7. Firma Karlovy trubky s.r.o. skladuje kovové trubky standardní délky 100 cm, které následně řeže a prodává v kratších délkách. Firma obdržela následující objednávku:

Délka (cm)	14	31	36	45
Množství (ks)	211	395	610	97

Navrhněte model pro výpočet minimálního množství 100cm trubek potřebných ke splnění objednávky a určení způsobu rozřezání trubek.

Řešení:

Označme J množinu všech možných způsobů, kterými lze 100cm trubku nařezat na trubky požadovaných délek, např. $45 + 45(+10)$, $45 + 36 + 14(+5)$, $45 + 31 + 14(+10)$ a další (pro tuto úlohu existuje 37 možných kombinací). Dále označme a_{ij} počet trubek délky $i \in \{14, 31, 36, 45\}$ získaných nařezáním 100cm trubky způsobem $j \in J$ (např. $a_{45,1} = 2$ pro první zmíněný způsob). Pro výpočet optimálního řezného plánu zavedeme proměnnou $x_j \in \mathbb{Z}$ pro $j \in J$, která bude určovat počet trubek nařezaných způsobem j.

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{j\in J} x_j && \text{[minimalizujeme počet použitých trubek]}\\
&\sum_{j\in J} a_{14,j} x_j \ge 211 && \text{[počet nařezaných trubek délky 14 je aspoň 211]}\\
&\sum_{j\in J} a_{31,j} x_j \ge 395 && \text{[počet nařezaných trubek délky 31 je aspoň 395]}\\
&\sum_{j\in J} a_{36,j} x_j \ge 610 && \text{[počet nařezaných trubek délky 36 je aspoň 610]}\\
&\sum_{j\in J} a_{45,j} x_j \ge 97 && \text{[počet nařezaných trubek délky 45 je aspoň 97]}\\
&x_j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$