

(2) Celočíselné polyedry, unimodularita, složitost

Příklad 1.1. Ukažte, že následující formulace celočíselných podmínek jsou ekvivalentní (popisují stejnou přípustnou množinu):

- $P_1 = \{x \in \{0, 1\}^4 : 12x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 14\}$,
- $P_2 = \{x \in \{0, 1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4\}$,
- $P_3 = \{x \in \{0, 1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_4 \leq 1\}$.

Která formulace je podle vás nejvhodnější pro modelování a řešení úlohy celočíselného lineárního programování? Proč?

Řešení:

Můžeme ověřit, že přípustná množina P_1 , P_2 i P_3 obsahuje právě celočíselné body

$$Z = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Jednotlivé formulace se však liší těsností lineární relaxace, kterou dostaneme nahrazením podmínky celočíselnosti $x \in \{0, 1\}^4$ slabší podmínkou $x \in [0, 1]^4$. Označme získané lineární relaxace P'_1 , P'_2 a P'_3 .

Zjevně platí inkluze $P'_1 \supseteq P'_2$, protože nerovnice $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$ je ekvivalentní s $12x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 12$, která je silnějším omezením než podmínka v P'_1 . Navíc platí ostrá inkluze $P'_1 \supset P'_2$, např. $(1, 0, 0, \frac{1}{2}) \in P'_1 \setminus P'_2$.

Dále jistě platí $P'_2 \supseteq P'_3$, jelikož P'_3 obsahuje nadmnožinu omezení P'_2 . Opět platí také ostrá inkluze, např. $(\frac{1}{2}, 0, 0, 1) \in P'_2 \setminus P'_3$.

Odvodili jsme tedy vztah

$$P'_1 \supset P'_2 \supset P'_3.$$

Vzhledem k těsnosti lineární relaxace proto může být pro řešení dané celočíselné úlohy nejvhodnější formulace P_3 , i když obsahuje nejvíc omezení. Navíc lze dokázat, že relaxace P'_3 popisuje přímo konvexní obal množiny Z .

Příklad 1.2. Navrhněte nejlepší formulaci pro popis množiny $P_I = \text{conv}(\mathbb{Z}^2 \cap P)$, kde polyedr P tvoří množina řešení soustavy

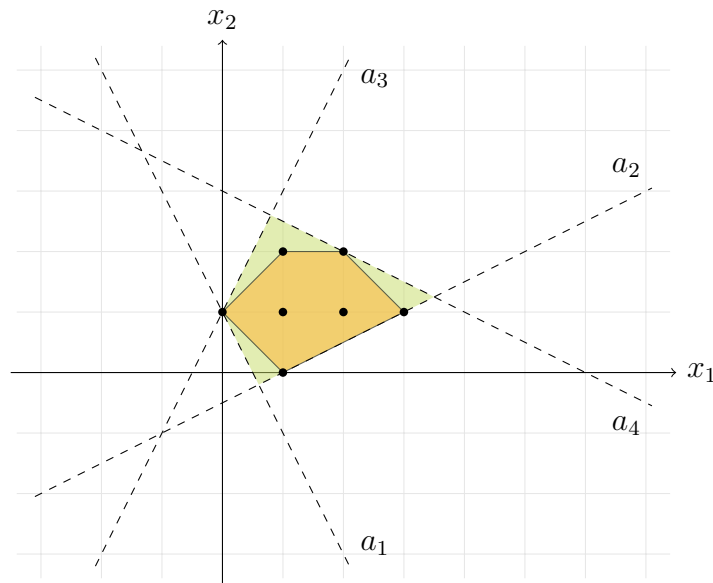
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Lze nahlédnout (např. graficky), že množina řešení zadané soustavy nerovnic obsahuje právě celočíselné body

$$Z = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Nejlepší formulací daných podmínek tedy bude soustava lineárních nerovnic, pro kterou tvoří množinu přípustných řešení konvexní obal množiny celočíselných bodů Z (viz také obrázek).



Konvexní obal množiny Z můžeme popsat např. jako soustavu nerovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.3. Jsou následující matice (totálně) unimodulární?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Matice A je totálně unimodulární. Můžeme ověřit, že determinanty všech čtvercových podmatic mají hodnotu -1 , 0 nebo 1 . Pro podmatice 1×1 je podmínka zjevně splněná. Determinant matice A je

$$\det A = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Zbývá ověřit podmínku pro podmatice 2×2 :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= -1, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= -1, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= -1, \\ \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 0, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 1, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 1, \\ \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 0, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 0, & \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= -1. \end{aligned}$$

Matice B není totálně unimodulární. Z definice musí mít determinant podmatic 1×1 také hodnotu ± 1 nebo 0 , totálně unimodulární matice proto mohou obsahovat pouze prvky z množiny $\{-1, 0, 1\}$. Determinant matice B je -2 , není tedy ani unimodulární.

Matice C není totálně unimodulární. Tato matice obsahuje čtvercovou podmatici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, pro kterou platí $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$. Determinant matice B je -2 , není tedy ani unimodulární.

Příklad 1.4. Převážní problém (transshipment problem) je modifikací klasického dopravního problému, ve které existují vnitřní uzly umožňující překládku zboží na cestě od dodavatelů ke spotřebitelům.

- (a) Formulujte přepravní problém jako úlohu toku v síti.
- (b) Formulujte přepravní problém jako dopravní problém.

Řešení:

Uvažujme přepravní problém daný grafem $G = (V, E)$ s množinou m dodavatelů s kapacitami s_i , množinou n spotřebitelů s kapacitami t_j , množinou vnitřních uzlů pro překládku zboží $U \subseteq V$ a cenou přepravy $c(e)$ za jednotku zboží přepravenou po hraně $e \in E$.

- (a) Síť vytvoříme na základě grafu G daného přepravního problému, přičemž kapacity existujících hran nastavíme ve vytvořené síti na ∞ a ceny hran na hodnoty $c(e)$. Dále do této sítě doplníme dva nové uzly:
 - zdroj s , ze kterého povede hrana k dodavateli i s kapacitou s_i a cenou 0 ,
 - stok t , do kterého povede hrana od spotřebitele j s kapacitou t_j a cenou 0 .

Přepravní plány v původním problému pak odpovídají s - t tokům ve vytvořené síti, přičemž cílem je najít tok požadované velikosti $\sum_j t_j$ s minimální cenou.

- (b) Každý vnitřní uzel $u \in U$ rozdělíme na nový dodavatelský uzel u_1 a spotřebitelský uzel u_2 . Hrany od dodavatelů do u_2 a ke spotřebitelům z u_1 a jejich ceny ponecháme stejné jako pro u v původním problému. Kapacitu s_u uzlu u_1 (pro nabídku zboží) a kapacitu t_u uzlu u_2 (pro poptávku zboží) nastavíme na celkovou kapacitu všech m dodavatelů $k = \sum_{i=1}^m s_i$.
Navíc přidáme novou hranu z s_u do t_u s cenou 0 , která umožní vyrovnat nabídku a poptávku: Pokud v přepravním problému došlo v uzlu u k překládce x jednotek zboží, pošleme ve vytvořeném dopravním problému $k - x$ jednotek zboží z u_1 do u_2 .

Příklad 1.5. Matice $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ je v intervalovém tvaru, pokud mají všechny řádky tvar

$$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

t.j. všechny hodnoty 1 následují za sebou v právě jednom souvislém intervalu. Ukažte, že každá matice v intervalovém tvaru je totálně unimodulární. (*Nápověda: Využijte elementární sloupcové úpravy.*)

Řešení:

Každá čtvercová podmatice matice A je také matice v intervalovém tvaru (při výběru podmatice zachováme pořadí sloupců). Chceme tedy ukázat, že pro čtvercovou matici $B \in \{0, 1\}^{k \times k}$ v intervalovém tvaru platí $\det B \in \{-1, 0, 1\}$.

Uvažujme sloupcovou úpravu, která odečte i -tý sloupec od sloupce $i + 1$. Lze nahlédnout, že tato sloupcová úprava nemění determinant matice. Pokud byla původní matice B v intervalovém tvaru, dostaneme postupným aplikováním této úpravy na sloupce $i = 1, 2, \dots, k - 1$ matici $B' \in \{-1, 0, 1\}^{k \times k}$, která má v každém řádku nanejvýš jednu hodnotu 1 a nanejvýš jednu hodnotu -1 . Analogicky důkazu Věty 1.10 (o matici incidence) můžeme dokázat, že upravená matice B' , a tedy i matice B , má hodnotu determinantu $\det B' \in \{-1, 0, 1\}$:

- obsahuje-li B' řádek s právě jednou nenulovou hodnotou, použijeme pro tento řádek Laplaceův rozvoj (ovlivňuje pouze znaménko determinantu),
- obsahuje-li B' nulový řádek, pak je $\det B' = 0$,
- obsahuje-li každý řádek právě jednu hodnotu 1 a právě jednu hodnotu -1 , pak je matice B' singulární a $\det B' = 0$ (součet všech sloupců je 0).

Příklad 1.6. Bud' $G = (V, E)$ vážený orientovaný graf s váhovou funkcí $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Formulujte (celočíslný) lineární program pro nalezení nejkratší cesty ze zdroje $s \in V$ do stoku $t \in V$. Ukažte, že matice omezení vytvořeného programu je totálně unimodulární.

Řešení:

Viz Příklad 1.14 a Větu 1.12 (a důkaz Věty 1.10) ve skriptech.

Příklad 1.7. Bud' $\sigma(\cdot)$ velikost bitového zápisu daného (racionálního) čísla. Ukažte, že pro celá čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sigma(a + b) \leq \sigma(a) + \sigma(b).$$

Řešení:

Pro $z \in \mathbb{Z}$ dostaneme dosazením $z = \frac{z}{1}$ do definice $\sigma(\cdot)$ rovnost

$$\sigma(z) = 1 + \lceil \log_2 (|z| + 1) \rceil + \lceil \log_2 (|1| + 1) \rceil = 2 + \lceil \log_2 (|z| + 1) \rceil.$$

Pro součet $a + b$ tedy platí $\sigma(a + b) = 2 + \lceil \log_2 (|a + b| + 1) \rceil$. Dále využijeme fakt, že funkce $\log_2(\cdot)$ je rostoucí, a pro absolutní hodnotu platí nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$. Můžeme tedy odvodit odhad

$$\sigma(a + b) = 2 + \lceil \log_2 (|a + b| + 1) \rceil \leq 2 + \lceil \log_2 (|a| + |b| + 1) \rceil.$$

Na druhou stranu pro součet $\sigma(a) + \sigma(b)$ platí díky nerovnosti $|x + y| \leq |x| + |y|$ odhad

$$\sigma(a) + \sigma(b) = 4 + \lceil \log_2 (|a| + 1) \rceil + \lceil \log_2 (|b| + 1) \rceil \geq 4 + \lceil \log_2 (|a| + 1) + \log_2 (|b| + 1) \rceil,$$

a z vlastností logaritmu dále dostaneme

$$4 + \lceil \log_2 (|a| + 1) + \log_2 (|b| + 1) \rceil = 4 + \lceil \log_2 ((|a| + 1)(|b| + 1)) \rceil.$$

Roznásobením argumentu logaritmu a jednoduchým odhadem pak snadno nahlédneme, že dokazovaná nerovnost platí:

$$\begin{aligned} \sigma(a + b) &\leq 2 + \lceil \log_2 (|a| + |b| + 1) \rceil \leq 2 + \lceil \log_2 (|a| + |a||b| + |b| + 1) \rceil \\ &\leq 4 + \lceil \log_2 (|a| + |a||b| + |b| + 1) \rceil \leq 4 + \lceil \log_2 ((|a| + 1)(|b| + 1)) \rceil \leq \sigma(a) + \sigma(b). \end{aligned}$$