(2) Celočíselné polyedry, unimodularita, složitost

Příklad 1.1. Ukažte, že následující formulace celočíselných podmínek jsou ekvivalentní (popisují stejnou přípustnou množinu):

- $P_1 = \{x \in \{0,1\}^4 : 12x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 14\}$,
- $P_2 = \{x \in \{0,1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4\}$,
- $P_3 = \{x \in \{0,1\}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1 + x_4 \leq 1\}$.

Která formulace je podle vás nejvhodnější pro modelování a řešení úlohy celočíselného lineárního programování? Proč?

Příklad 1.2. Navrhněte nejlepší formulaci pro popis množiny $P_I = \operatorname{conv}(\mathbb{Z}^2 \cap P)$, kde polyedr P tvoří množina řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.3. Jsou následující matice (totálně) unimodulární?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.4. Přepravní problém (transshipment problem) je modifikací klasického dopravního problému, ve které existují vnitřní uzly umožňující překládku zboží na cestě od dodavatelů ke spotřebitelům.

(a) Formulujte přepravní problém jako úlohu toku v síti.

(b) Formulujte přepravní problém jako dopravní problém.

Příklad 1.5. Matice $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ je v intervalovém tvaru, pokud mají všechny řádky tvar

$$(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0),$$

t.j. všechny hodnoty 1 následují za sebou v právě jednom souvislém intervalu. Ukažte, že každá matice v intervalovém tvaru je totálně unimodulární. *(Nápověda: Využijte elementární sloupcové úpravy.)*

Příklad 1.6. Buď $G = (V, E)$ vážený orientovaný graf s váhovou funkcí $c\colon E \to \mathbb{R}^+$. Formulujte (celočíselný) lineární program pro nalezení nejkratší cesty ze zdroje $s \in V$ do stoku $t \in V$. Ukažte, že matice omezení vytvořeného programu je totálně unimodulární.

Příklad 1.7. Buď $\sigma(\cdot)$ velikost bitového zápisu daného (racionálního) čísla. Ukažte, že pro celá čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sigma(a + b) \leq \sigma(a) + \sigma(b).$$