(3) Metody: Sečné nadroviny a branch & bound

Příklad 3.1. Najděte pomocí ℓ-metody optimální řešení lineárního programu:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{za podm.} & -x_1 + x_2 \le 1, \\ & 3x_1 - 4x_2 \le 6, \\ & x_1 + x_2 \le 4, \\ & x_1 + 3x_2 \le 9, \\ & x_2 \le \frac{5}{2}, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Řešení:
Viz Příklad 2.10 ve skriptech.

Příklad 3.2. Najděte optimální řešení následujících celočíselných lineárních programů pomocí prvního Gomoryho algoritmu:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{za podm.} & 3x_1 + 6x_2 \le 10, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{array} \tag{a}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{za podm.} & 2x_1 + x_2 \le 7, \\ & -3x_1 + x_2 \le -1, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{array} \tag{b}$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 \\ \text{za podm.} & -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \le \frac{1}{3}, \\ & x_1 - \frac{1}{3}x_2 \le \frac{1}{3}, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array} \tag{c}$$

Řešení:

(a) Sestavíme počáteční tabulku ℓ-metody pro nalezení optimálního řešení lineární relaxace. Počáteční tabulka není ℓ-normální (pro sloupce neplatí $R_j \succ 0$), přidáme proto podmínku $x_1 + x_2 \le L$ a provedeme příslušnou transformaci. Řádek s přidanou podmínkou je klíčový, klíčovým sloupcem je lexikograficky minimální sloupec, tedy první. V dalším kroku je klíčovým řádkem k první řádek se zápornou pravou stranou R_{k0} a klíčový sloupec ℓ volíme podle pravidla

$$\frac{R_\ell}{|R_{k\ell}|} = \operatorname{lex\,min}\left\{ \frac{R_j}{|R_{kj}|} : R_{kj} < 0,\ j = 1, \ldots, n \right\}.$$

	x_1	x_2	
x_0	-1	-1	0
x_1	-1	0	0
x_2	0	-1	0
x_3	3	6	10
x_4	1	1	L

$\sim$

	x_4	x_2	
x_0	1	0	L
x_1	1	1	L
x_2	0	-1	0
x_3	-3	3	$10-3L$
x_4	-1	0	0

$\sim$

	x_3	x_2	
x_0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{10}{3}$
x_2	0	-1	0
x_3	-1	0	0
x_4	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{10}{3}+L$

Přidaný řádek s omezením můžeme po poslední úpravě vypustit, protože hodnota na pravé straně už bude vždy kladná a řádek tedy nebude klíčový. Poslední sloupec tabulky je nezáporný, optimálním řešením relaxace je $(\frac{10}{3}, 0)$. Toto řešení není celočíselné, zavedeme tedy řez podle prvního řádku s neceločíselnou hodnotou na pravé straně (t.j. řádek s proměnnou x_0). Do tabulky přidáváme řez jako řádek ve tvaru

$$-\{R_{k1}\} \ \dots \ -\{R_{kn}\} \mid -\{R_{k0}\},$$

kde $\{r\} = r - \lfloor r \rfloor$. Tento řádek volíme jako klíčový.

	x_3	x_2	
x_0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{10}{3}$
x_2	0	-1	0
x_3	-1	0	0
x_5	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

$\sim$

	x_5	x_2	
x_0	1	1	3
x_1	1	2	3
x_2	0	-1	0
x_3	-3	0	1
x_5	-1	0	0

Ve výsledné tabulce vidíme optimální řešení celočíselného programu $(x_1, x_2) = (3, 0)$ s hodnotou účelové funkce 3.

(b) Opět vytvoříme počáteční tabulku, kterou jednou transformací upravíme na ℓ-normální tabulku a následně hledáme optimální řešení relaxace.

	x_1	x_2	
x_0	0	-1	0
x_1	-1	0	0
x_2	0	-1	0
x_3	2	1	7
x_4	-3	1	-1
x_5	1	1	L

$\sim$

	x_1	x_5	
x_0	1	1	L
x_1	-1	0	0
x_2	1	1	L
x_3	1	-1	$7-L$
x_4	-4	-1	$-1-L$
x_5	0	-1	0

$\sim$

	x_1	x_3	
x_0	2	1	7
x_1	-1	0	0
x_2	2	1	7
x_3	0	-1	0
x_4	-5	-1	-8
x_5	-1	-1	$-7+L$

Poslední řádek s přidaným omezením můžeme v tomto kroku opět vypustit. Na pravé straně je záporná hodnota v řádku s x_4, provedeme proto ještě jednu transformaci s tímto klíčovým řádkem.

	x_1	x_3	
x_0	2	1	7
x_1	-1	0	0
x_2	2	1	7
x_3	0	-1	0
x_4	-5	-1	-8

$\sim$

	x_4	x_3	
x_0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$
x_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$
x_3	0	-1	0
x_4	-1	0	0

Získali jsme optimální řešení relaxace $(x_1, x_2) = (\frac{8}{5}, \frac{19}{5})$ s hodnotou účelové funkce $\frac{19}{5}$. Řešení není celočíselné, zavedeme tedy řez podle řádku s x_0 a provedeme další transformaci tabulky.

	x_4	x_3	
x_0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$
x_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{5}$
x_3	0	-1	0
x_4	-1	0	0
x_6	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$

$\sim$

	x_6	x_3	
x_0	1	0	3
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_2	1	0	3
x_3	0	-1	0
x_4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
x_6	-1	0	0

Výsledné řešení $(x_1, x_2) = (2, 3)$ už je celočíselné, je tedy optimálním řešením zadané úlohy.

(c) Viz Příklad 2.20 ve skriptech.

Příklad 3.3. Vyřešte celočíselný program (c) z Příkladu 3.2 druhým Gomoryho algoritmem.

Řešení:
Viz Příklad 2.25 ve skriptech.

Příklad 3.4.

(a) Jakým způsobem lze při použití ℓ-metody rozpoznat neomezené lineární programy?

(b) Jak můžeme rozpoznat nepřípustnou lineární relaxaci, případně nepřípustný celočíselný program při řešení úlohy Gomoryho algoritmem?

Řešení:

(a) Pokud je počáteční tabulka úlohy ℓ-normální, pak je $-c^T \geq 0$ a příslušná maximalizační úloha je pro $x \geq 0$ omezená. Jinak přidáme pro transformaci na ℓ-normální tabulku podmínku ve tvaru $\sum x_i \leq L$ pro „dostatečně velkou“ hodnotu parametru L. Pro neomezenou úlohu se parametr L dostane v optimální tabulce do hodnoty účelové funkce, která může být libovolně velká.

(b) V případě nepřípustného celočíselného programu povede Gomoryho algoritmus po přidání řezů v určitém kroku k nepřípustné lineární relaxaci. V ℓ-metodě rozpoznáme nepřípustnou relaxaci tak, že pro zvolený klíčový řádek (s hodnotou $R_{k0} < 0$ v posledním sloupci tabulky) neexistuje v daném řádku žádný kandidát na pivota s $R_{kj} < 0$ (viz Tvrzení 2.8).

Příklad 3.5. Najděte Chvátalův–Gomoryho řez, který odřízne bod $(0, \frac{25}{6}, 0, 0, 0)$ od polyedru

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^5 : 9x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 17x_4 + 13x_5 \geq 50, x \geq 0\}.$$

Řešení:
Víme, že pro libovolný nezáporný vektor $u \geq 0$ můžeme vytvořit platnou nerovnost pro množinu $\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ ve tvaru $\lceil u^T A \rceil x \geq \lceil u^T b \rceil$. Pro zadanou množinu M tedy hledáme řez ve tvaru

$$\lceil 9u \rceil x_1 + \lceil 12u \rceil x_2 + \lceil 8u \rceil x_3 + \lceil 17u \rceil x_4 + \lceil 13u \rceil x_5 \geq \lceil 50u \rceil.$$

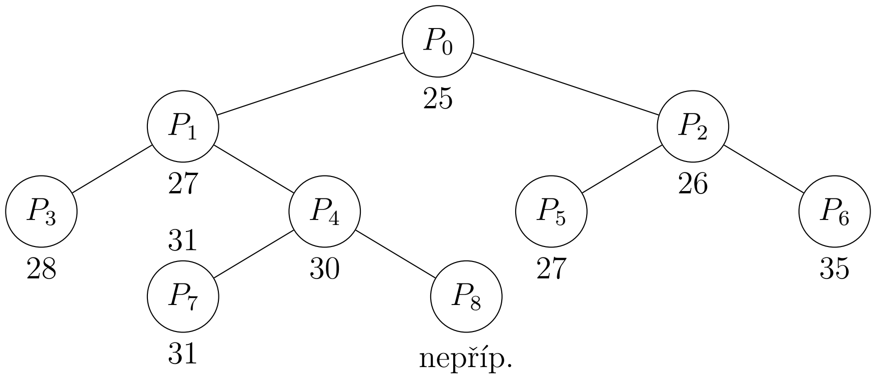
Aby tato nerovnost odřízla bod $(0, \frac{25}{6}, 0, 0, 0)$, musí platit $\lceil 12u \rceil \frac{25}{6} < \lceil 50u \rceil$.

Například pro volbu $u = \frac{1}{3}$ dostaneme řez

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 \geq 17,$$

který splňuje požadovanou vlastnost $\lceil 12 \cdot \frac{1}{3} \rceil \frac{25}{6} = \frac{50}{3} < 17$.

Příklad 3.6. Uvažujme minimalizační úlohu celočíselného programování, pro kterou je průběh metody branch & bound reprezentován následujícím výpočetním stromem (číslo pod uzlem reprezentuje optimální hodnotu příslušné lineární relaxace, číslo nad uzlem optimální hodnotu s celočíselným řešením):



Najděte co nejtěsnější meze pro optimální hodnotu úlohy. Které uzly stromu můžeme odříznout, a které musíme dále rozvětvit a prohledat?

Řešení:
Horní mez na optimální hodnotu účelové funkce minimalizační úlohy můžeme získat z aktuálně nejlepšího nalezeného přípustného řešení, které je celočíselné. Dle znázorněného výpočetního stromu se jediná optimální hodnota s celočíselným řešením nachází v uzlu P_7, aktuální horní mez na optimální hodnotu je tedy 31.

Dolní mezí je nejlepší optimální hodnota lineární relaxace v aktuálních listech výpočetního stromu (ještě může obsahovat nějaké celočíselné řešení). Listy s neceločíselným řešením lineární relaxace jsou P_3, P_5 a P_6 (podúloha v P_8 je nepřípustná), dolní mezí tedy bude hodnota 27.

Dále musíme rozvětvit podúlohy v uzlech P_3 a P_5. Relaxace v uzlu P_8 je nepřípustná a relaxace v P_7 už má celočíselné optimum, tyto větve prohledávání tedy můžeme ukončit. Také můžeme ukončit prohledávání v uzlu P_6, jelikož optimum příslušné relaxace je horší, než celočíselné řešení nalezené v P_7.

Příklad 3.7. Řešte pomocí metody branch & bound:

(a) úlohu (c) z Příkladu 3.2,

(b) následující celočíselný lineární program:

$$\begin{array}{ll} \max & 13x_1 + 8x_2 \\ \text{za podm.} & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Řešení:

(a) Viz Příklad 3.6 ve skriptech.

(b) Opět začneme sestrojením ℓ-normální tabulky a vyřešením lineární relaxace.

	x_1	x_2	
x_0	-13	-8	0
x_1	-1	0	0
x_2	0	-1	0
x_3	1	2	10
x_4	5	2	20
x_5	1	1	L

$\sim$

	x_5	x_2	
x_0	13	5	$13L$
x_1	1	1	L
x_2	0	-1	0
x_3	-1	1	$10 - L$
x_4	-5	-3	$20 - 5L$
x_5	-1	0	0

$\sim$

	x_3	x_2	
x_0	13	18	130
x_1	1	2	10
x_2	0	-1	0
x_3	-1	0	0
x_4	-5	-8	-30
x_5	-1	-1	$-10 + L$

V následujícím kroku získáme optimální řešení lineární relaxace $(x_1, x_2) = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4})$. Řešení není celočíselné, rozvětvíme proto výpočet na dvě podúlohy podle některé celočíselné proměnné s aktuálně neceločíselnou hodnotou, zvolíme např. proměnnou x_1. V podúlohách přidáváme do programu omezení $x_1 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$, resp. $x_1 \geq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor + 1 = 3$. Do příslušné tabulky můžeme tato omezení přidat ve tvaru

$$-\sum_{j=1}^{n} R_{kj} x_{N_j} \leq -\{R_{k0}\}, \qquad \sum_{j=1}^{n} R_{kj} x_{N_j} \leq \{R_{k0}\} - 1.$$

Následně tedy řešíme podúlohu s přidaným řádkem I., který reprezentuje první nerovnost, a druhou podúlohu s přidaným řádkem II. pro druhou nerovnost.

	x_3	x_4	
x_0	$\frac{7}{4}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{125}{2}$
x_1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
x_2	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{15}{4}$
x_3	-1	0	0
x_4	0	-1	0
(I)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
(II)	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

(I)

	x_3	x_6	
x_0	4	9	58
x_1	0	1	2
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4
x_3	-1	0	0
x_4	-1	-4	2
x_6	0	-1	0

(II)

	x_7	x_4	
x_0	7	4	59
x_1	-1	0	3
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_3	-4	-1	2
x_4	0	-1	0
x_7	-1	0	0
(III)	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(IV)	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Po jedné transformaci dostaneme v úloze (I) celočíselné optimální řešení $(x_1, x_2) = (2, 4)$ s hodnotou 58. V úloze (II) dostaneme neceločíselné řešení $(3, \frac{5}{2})$ s lepší hodnotou účelové funkce 59, musíme tedy tento uzel dále rozvětvit. Volíme proměnnou x_2 a přidáním podmínek $x_2 \leq 2$ a $x_2 \geq 3$ vytvoříme podúlohy (III) a (IV).

Úloha (III) vede na relaxaci s optimální hodnotou 57.6, která je horší než aktuální nejlepší hodnota pro celočíselné řešení, tuto větev můžeme tedy ukončit. Dále lze snadno nahlédnout, že úloha (IV) je nepřípustná, jelikož obsahuje podmínky $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 3$ a $5x_1 + 2x_2 \leq 20$.

Optimálním řešením zadané celočíselné úlohy je tedy řešení $(2, 4)$.

Příklad 3.8. Využijte různé techniky preprocessingu (utáhnutí mezí, test redundance a nepřípustnosti, fixace proměnných) pro zjednodušení celočíselného programu:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{za podm.} & 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 \leq 15, \\ & 8x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 9, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ & x_1 \in [0,3],\ x_2 \in [0,1],\ x_3 \geq 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Řešení:

Označme l_i, u_i dolní a horní mez pro proměnnou x_i. Z první nerovnosti můžeme odvodit těsnější meze pro proměnné x_1 a x_3:

$$x_1 \leq \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}u_2 - a_{13}l_3) = \frac{1}{5}(15 + 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1) = \frac{9}{5} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 \leq \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor = 1,$$

$$x_3 \leq \frac{1}{a_{13}}(b_1 - a_{11}l_1 - a_{12}u_2) = \frac{1}{8}(15 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{17}{8} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 \leq \left\lfloor \frac{17}{8} \right\rfloor = 2.$$

Dále můžeme snadno nahlédnout, že poslední nerovnost je redundantní, protože platí

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1 + 2 = 4 \leq b_3 = 6.$$

Můžeme tedy uvažovat zjednodušenou úlohu

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 \\ \text{za podm.} & \ \ 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 \leq 15, \\ & -8x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 \leq -9, \\ & x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [0,1],\ x_3 \in [1,2], \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Nakonec můžeme zafixovat proměnnou x_2 na horní hranici $x_2 = 1$, jelikož je to nejvýhodnější možnost pro hodnotu účelové funkce (kde má x_2 kladný koeficient) i pro omezující podmínky (kde má x_2 záporný koeficient). Podobně můžeme fixovat hodnotu proměnné $x_3 = 1$. Z poslední nerovnosti pak dosazením získáme

$$x_1 \geq -\frac{1}{8}(-9 + 3 - 1) = \frac{7}{8},$$

tedy fixujeme $x_1 = 1$. Optimálním řešením úlohy je proto $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.