

### (3) Metody: Sečné nadroviny a branch & bound

**Příklad 3.1.** Najděte pomocí  $\ell$ -metody optimální řešení lineárního programu:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ \text{za podm.} & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ & x_2 \leq \frac{5}{2}, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

**Příklad 3.2.** Najděte optimální řešení následujících celočíselných lineárních programů pomocí prvního Gomoryho algoritmu:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{za podm.} & 3x_1 + 6x_2 \leq 10, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{array} \quad (\text{a})$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ \text{za podm.} & 2x_1 + x_2 \leq 7, \\ & -3x_1 + x_2 \leq -1, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \end{array} \quad (\text{b})$$

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 \\ \text{za podm.} & -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3}, \\ & x_1 - \frac{1}{3}x_2 \leq \frac{1}{3}, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array} \quad (\text{c})$$

**Příklad 3.3.** Vyřešte celočíselný program (c) z Příkladu 3.2 druhým Gomoryho algoritmem.

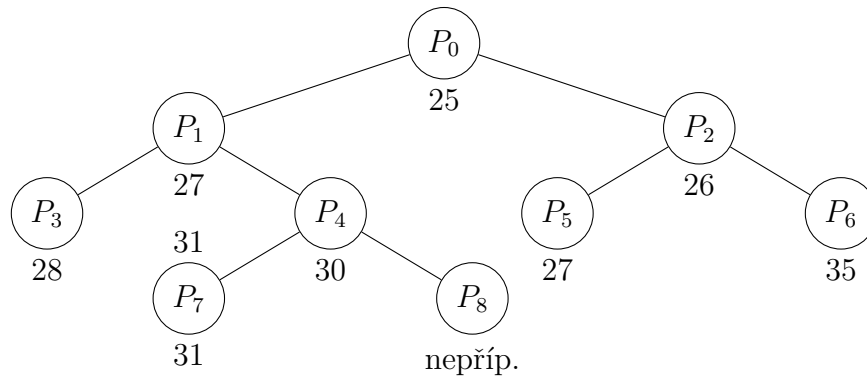
**Příklad 3.4.**

- Jakým způsobem lze při použití  $\ell$ -metody rozpoznat neomezené lineární programy?
- Jak můžeme rozpoznat nepřipustnou lineární relaxaci, případně nepřipustný celočíselný program při řešení úlohy Gomoryho algoritmem?

**Příklad 3.5.** Najděte Chvátalův–Gomoryho řez, který odřízne bod  $(0, \frac{25}{6}, 0, 0, 0)$  od polyedru

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^5 : 9x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 17x_4 + 13x_5 \geq 50, x \geq 0\}.$$

**Příklad 3.6.** Uvažujme minimalizační úlohu celočíselného programování, pro kterou je průběh metody branch & bound reprezentován následujícím výpočetním stromem (číslo pod uzlem reprezentuje optimální hodnotu příslušné lineární relaxace, číslo nad uzlem optimální hodnotu s celočíselným řešením):



Najděte co nejtěsnější meze pro optimální hodnotu úlohy. Které uzly stromu můžeme odříznout, a které musíme dále rozvětvit a prohledat?

**Příklad 3.7.** Řešte pomocí metody branch & bound:

- (a) úlohu (c) z Příkladu 3.2,
- (b) následující celočíselný lineární program:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 13x_1 + 8x_2 \\
 \text{za podm.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10, \\
 & 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned}$$

**Příklad 3.8.** Využijte různé techniky preprocessingu (utáhnutí mezí, test redundance a nepřipustnosti, fixace proměnných) pro zjednodušení celočíselného programu:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\
 \text{za podm.} \quad & 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 \leq 15, \\
 & 8x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 9, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\
 & x_1 \in [0, 3], x_2 \in [0, 1], x_3 \geq 1, \\
 & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$