(5) Speciální případy: Problém batohu, TSP a další

Příklad 5.1. Řešte problém batohu pomocí metody branch-and-bound:

$$\begin{array}{ll} \max & 17x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 17x_4 \\ \text{za podm.} & 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4 \leq 12, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Příklad 5.2. Vyřešte následující instanci problému batohu pseudopolynomiálním algoritmem:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \\ \text{za podm.} & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7, \\ & x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Příklad 5.3. Uvažujme problém batohu z předcházejícího příkladu.

(a) Najděte optimální řešení lineární relaxace a využijte jej ke konstrukci sečné nadroviny typu „cover“.

(b) Použijte lifting pro zesílení řezu a vyřešte lineární relaxaci nové úlohy.

Příklad 5.4. Aplikujte na symetrickou úlohu TSP na vrcholech $v_1, \ldots, v_5$ s maticí vzdáleností

$$\begin{pmatrix} - & 8 & 4 & 9 & 9 \\ 8 & - & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 6 & - & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 5 & - & 4 \\ 9 & 10 & 6 & 4 & - \end{pmatrix},$$

následující heuristiky:

(a) nejbližší soused (nearest neighbor),

(b) hladový algoritmus,

(c) metoda úspor (savings),

(d) vkládání nejbližšího (nearest insertion),

(e) metoda minimální kostry,

(f) metoda 2-výměn.

Příklad 5.5. Řešte Lagrangeovu relaxaci založenou na 1-stromech pro symetrické TSP s maticí vzdáleností

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 10 & - & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & - & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & - & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 2 & - & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 & - \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.6. Využijte lineární relaxaci, hladový algoritmus a lokální vylepšování pro řešení úlohy UFLP s cenami

$$C' = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.7. Označme $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Buď P konvexní obal množiny všech bodů splňujících omezující podmínky modelu UFLP pro $m = 2$, t.j.

$$z_{1j} + z_{2j} = 1 \ \ \forall j \in [n], \quad 0 \le z_{ij} \le y_i \ \ \forall i \in \{1,2\}, j \in [n], \quad y_1, y_2 \in \{0,1\}.$$

Dokažte, že $z_{ij} \le y_i$ je stěnová nerovnost pro P pro každé $i \in \{1,2\}$ a $j \in [n]$. Umíte důkaz zobecnit pro libovolné $m \in \mathbb{N}$?