Domácí úkoly z Celočíselného programování (LS 2020/2021): (2) Celočíselné polyedry, unimodularita, složitost

Úkol 2.1. Rozhodněte, zda pro konvexní polyedry $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ platí některá z následujících inkluzí (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

(a) $(P+Q)_I \subseteq P_I + Q_I$,

(b) $(P+Q)_I \supseteq P_I + Q_I$,

kde P_I je polyedr $P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. [4 b]

Úkol 2.2. Je následující matice totálně unimodulární?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 b]

Úkol 2.3. Buďte $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ unimodulární matice. Které z matic A^T, $A+B$, $A\cdot B$ jsou také unimodulární? Platí stejné vlastnosti pro transpozici, součet a součin totálně unimodulárních matic? [3 b]

Úkol 2.4. Mějme regulární matici $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

(a) Buď A unimodulární matice. Je inverzní matice A^{-1} také unimodulární?

(b) Buď A totálně unimodulární. Je matice A^{-1} také totálně unimodulární? [4 b]

Úkol 2.5. Ukažte, že pro testování totální unimodularity nestačí uvažovat pouze čtvercové podmatice, které tvoří po sobě následující řádky/sloupce dané matice.

Kolik je všech čtvercových podmatic matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, které v definici totální unimodularity uvažujeme? [3 b]

Úkol 2.6. Označme $\sigma(\cdot)$ velikost bitového zápisu daného (racionálního) čísla.

(a) Ukažte, že $\sigma(a+b) \le \sigma(a) + \sigma(b)$ obecně neplatí pro $a, b \in \mathbb{Q}$.

(b) Ukažte, že platí $\sigma(a \cdot b) \le \sigma(a) + \sigma(b)$ pro $a, b \in \mathbb{Q}$. [4 b]