1 Intervalová aritmetika

Úloha 1. Dokažte následující vlasnosti intervalové aritmetiky pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$:

a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$, [2 b]

b) $\boldsymbol{x} = x_c + x_\Delta[-1, 1]$. [2 b]

Úloha 2. Ukažte vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$:

a) Ukažte, že pokud $\boldsymbol{A} = A$ je bodová matice ($A_\Delta = 0$), potom $A(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = A\boldsymbol{B} + A\boldsymbol{C}$. [2 b]

b) Určete, zda pro násobení intervalových matic platí $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$. [2 b]

c) Určete, kdy platí $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = 0$. [1 b]

Úloha 3. Kategorizujte algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +)$, $(\mathbb{IR}, -)$ a $(\mathbb{IR}, +, \cdot)$ dle asociativity, komutativity a distributivity intervalových operací a existence neutrálních a inverzních prvků. [4 b]

Úloha 4. Definujme vzdálenost intervalů jako

$$q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max(|\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}|, |\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}|).$$

Pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}^n$ dále vzdálenost jako

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} q(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i).$$

Ukažte, že vzdálenostní funkce $Q : \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n \to \mathbb{R}$ je metrika. [4 b]

Úloha 5. Rozhodněte, zda intervalová funkce $f : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ definovaná

$$f\left([a_c - a_\Delta, a_c + a_\Delta]\right) = \left[a_c - \frac{1}{2}a_\Delta, a_c + \frac{1}{2}a_\Delta\right]$$

je isotonní v inkluzi. [2 b]

Úloha 6. Uvažujme rekurzivní rovnici

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1}^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \\ x_0 &= 1 - 10^{-21}. \end{aligned}$$

Hledáme hodnotu x_{75}. Použitím 10-místné aritmetiky dosáhneme výsledku $x_0 = x_1 = \ldots = 1$. Nicméně přesná hodnota splňuje $x_{75} < 10^{-10}$. Dokažte. [6 b]