3 Intervalová lineární algebra

Úloha 1. Jaké jsou topologické vlastnosti množiny rešení Σ soustavy nerovnic $\boldsymbol{A}x \leq \boldsymbol{b}$? [4 b]

a) Může být množina Σ nesouvislá?

b) Může mít množina Σ jak omezené tak neomezené komponenty souvislosti?

c) Může mít množina Σ více omezených komponent souvislosti?

Pokud ano, najděte příklad v $\mathbb{R}^2$ a načrtněte množinu řešení příslušné soustavy.

Úloha 2. Charakterizujte, kdy je $x \in \mathbb{R}^n$ silným řešením intervalové soustavy rovnic $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, tj. kdy splňuje naráz všechny rovnice $Ax = b$ pro $A \in \boldsymbol{A}$, $b \in \boldsymbol{b}$. [2 b]

Úloha 3. Spočítejte obálku pro vlastní čísla $\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A}^S)$ intervalové matice [3 b]

$$\begin{pmatrix} -3 & [4, 6] & [-3, -1] \\ [4, 6] & [-5, -1] & [1, 3] \\ [-3, -1] & [1, 3] & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4. Buď $c \in \mathbb{R}$ pevné a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. Dokažte, že testování, zda $c \in \lambda_i(\boldsymbol{A}^S)$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$, je NP-těžké. [4 b]

Úloha 5. Buď $\boldsymbol{v} \in \mathbb{IR}^n$. Najděte intervaly vlastních čísel $\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A}^S)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, pro diagonální matici $\boldsymbol{A}^S = \operatorname{diag}(\boldsymbol{v})$. [4 b]

Úloha 6. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

a) Pokud je matice $\boldsymbol{A}^S$ positivně semidefinitní, pak $\lambda_n(A_c) \geq \rho(A_\Delta)$. [2 b]

b) Pokud je matice $\boldsymbol{A}^S$ positivně definitní, pak $\lambda_n(A_c) > \rho(A_\Delta)$. [2 b]

Úloha 7. Charakterizujte nějaké třídy matic, pro které je snadné testovat positivní (semi)definitnost a formulujte na nich podmínky pro testování těchto vlastností. [4 b]