1 Intervalová aritmetika

Úloha 1. Dokažte následující vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}$:

a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$, [2 b]

b) $\boldsymbol{x} = x_c + x_\Delta[-1, 1]$. [2 b]

Úloha 2. Magnitudu intervalu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}$ definujeme jako

$$\mathrm{mag}(\boldsymbol{x}) := \max\{|\overline{x}|, |\underline{x}|\}.$$

Ukažte, že pro magnitudu platí $\mathrm{mag}(\boldsymbol{x}) = |x_c| + x_\Delta$. [2 b]

Úloha 3. Kategorizujte algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +)$, $(\mathbb{IR}, -)$ a $(\mathbb{IR}, +, \cdot)$ dle asociativity, komutativity a distributivity intervalových operací. Dále rozhodněte, zda vzhledem k dané operaci existuje neutrální prvek a inverzní prvek pro každý interval. [6 b]

Úloha 4. Ukažte vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$:

a) Ukažte, že pokud $\boldsymbol{A} = A$ je bodová matice ($A_\Delta = 0$), potom $A(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = A\boldsymbol{B} + A\boldsymbol{C}$. [2 b]

b) Rozhodněte, zda pro násobení intervalových matic platí $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. [2 b]

c) Určete (a zdůvodněte), kdy platí $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = 0$. [2 b]

Úloha 5. Rozhodněte, zda intervalová funkce $f : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ definovaná

$$f([a_c - a_\Delta, a_c + a_\Delta]) = \left[a_c - \frac{1}{2}a_\Delta, a_c + \frac{1}{2}a_\Delta\right]$$

je isotonní v inkluzi. [2 b]

Úloha 6. Definujme vzdálenost intervalů jako

$$q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \max(|\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}|, |\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}|).$$

Pro intervalové vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{IR}^n$ dále definujme vzdálenost jako

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{i=1,\dots,n} q(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i).$$

Ukažte, že vzdálenostní funkce $Q : \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n \to \mathbb{R}$ je metrika. [5 b]