

2 Intervalové lineární soustavy a regularita

Úloha 1. Následující vlastnosti jsou nutné pro regularitu intervalové matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Rozhodněte, které z podmínek jsou také postačující:

- a) Matice $A_{yz} = A^c + \text{diag}(y)A^\Delta \text{diag}(z)$ je regulární pro každé $y, z \in \{\pm 1\}^n$. [2 b]
- b) Matice A^c a všechny matice A tvaru $a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\}$ jsou regulární. [2 b]

Úloha 2. Rozhodněte, zda jsou následující intervalové matice regulární (použijte různé podmínky pro testování regularity):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-2, 0] & [3, 5] \\ [-3, -2] & [-4, -2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [-3, -1] \\ [1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [2, 6] \\ [-4, -2] & [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad [6 \text{ b}]$$

Úloha 3. Intervalová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ je nezáporně invertibilní pokud platí $A^{-1} \geq 0$ pro každou matici $A \in \mathbf{A}$. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že \mathbf{A} je nezáporně invertibilní pokud splňuje podmínku

$$\rho(I_n - \underline{\mathbf{A}}) < 1, \quad \bar{\mathbf{A}} \leq I_n, \quad \forall i: a_{ii} = 1. \quad [5 \text{ b}]$$

Úloha 4. Vytvořte program, který pro náhodně zvolenou počáteční matici

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

náhodně zvolený vektor $b = (b_1, b_2)^T$ a hodnoty $\delta \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ vykreslí množinu řešení intervalové soustavy

$$[A_c - D, A_c + D]x = [b - d, b + d],$$

kde $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (resp. $d \in \mathbb{R}^2$) je matice (resp. vektor) obsahující na všech prvcích hodnotu δ . Lze při fixních A_c a b odhadnout změny v této množině řešení při změně parametru δ ? [4 b]

Úloha 5. Rovnice zapojení elektrického obvodu je vyjádřena jako

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{pmatrix}.$$

Pro $V_1 = 10$, $V_2 = 5$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1000 \pm 10\%$ nalezněte obálku pro hodnoty I_1 a I_2 . Zkuste využít a porovnat různé metody pro výpočet obálky (vlastní implementaci nebo dostupné balíčky pro intervalové výpočty). Dokážete využít závislosti parametrů k nalezení tesnější obálky? [6 b]