

3 Intervalová lineární algebra a soustavy nerovnic

Úloha 1. Rozhodněte, jaké jsou topologické vlastnosti množiny (slabých) řešení Σ intervalové soustavy nerovnic $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$:

- Může být množina Σ nespojitá?
- Může mít množina Σ jak omezené tak neomezené komponenty souvislosti?
- Může mít množina Σ více omezených komponent souvislosti?

Pokud ano, najděte příklad v \mathbb{R}^2 a načrtněte množinu řešení příslušné soustavy. [4 b]

Úloha 2. Popište a ilustруйте množinu slabých a silných řešení intervalové lineární soustavy:

$$\begin{pmatrix} [-3, 1] & [1, 2] \\ [-1, 1] & -2 \\ [1, 2] & [-2, 1] \\ -2 & [-1, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [3, 4] \\ [3, 4] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad [4 \text{ b}]$$

Úloha 3. Spočítejte obálku pro vlastní čísla $\lambda_i(\mathbf{A}^S)$ intervalové matice

$$\begin{pmatrix} -3 & [4, 6] & [-3, -1] \\ [4, 6] & [-5, -1] & [1, 3] \\ [-3, -1] & [1, 3] & -1 \end{pmatrix}. \quad [3 \text{ b}]$$

Úloha 4. Buď $c \in \mathbb{R}$ pevné a $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Dokažte, že testování, zda $c \in \lambda_i(\mathbf{A}^S)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, je NP-těžké. [3 b]

Úloha 5. Buď $\mathbf{v} \in \mathbb{IR}^n$. Najděte intervaly vlastních čísel $\lambda_i(\mathbf{A}^S)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pro diagonální matici $\mathbf{A}^S = \text{diag}(\mathbf{v})$. [4 b]

Úloha 6. Rozhodněte, zda jsou matice \mathbf{A}^S , \mathbf{B}^S pozitivně (semi-)definitní:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} [6, 8] & [-3, -1] & [-2, 0] \\ [-3, -1] & [7, 9] & [1, 3] \\ [-2, 0] & [1, 3] & [4, 6] \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [13, 15] & [3, 7] & [9, 11] \\ [3, 7] & [4, 8] & 5 \\ [9, 11] & 5 & [13, 15] \end{pmatrix}. \quad [4 \text{ b}]$$

Úloha 7. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

- Pokud je matice \mathbf{A}^S pozitivně semidefinitní, pak $\lambda_n(A_c) \geq \rho(A_\Delta)$.
- Pokud je matice \mathbf{A}^S pozitivně definitní, pak $\lambda_n(A_c) > \rho(A_\Delta)$.

[3 b]