4 Obraz funkce a nelineární soustavy

Úloha 1. Dokažte, nebo vyvraťte:

$$\text{a) } f(\cup_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i) = \cup_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i), \qquad \text{b) } f(\cap_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i) = \cap_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i).$$

[4 b]

Úloha 2. Uvažujme následující (ekvivalentní) funkce:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1, \\ g(x) &= 1 + x(-6 + x(15 + x(-20 + x(15 + x(-6 + x))))), \\ h(x) &= (x-1)^6. \end{aligned}$$

Určete intervalové obálky $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ a $h(\boldsymbol{x})$ pro interval $\boldsymbol{x} = [0.999, 1.001]$. [2 b]

Úloha 3. Odvoďte vzorce pro sklony daných funkcí vzhledem k $S_f(x, a)$:

(a) $f(x)^n$, [3 b]

(b) $|f(x)|$. [3 b]

Úloha 4. S použitím vhodného software vypočtěte obálku funkce

$$f(x) = \frac{x_1^3 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

nad $\boldsymbol{x} = ([2-\delta, 2+\delta], [2-\delta, 2+\delta])$ postupně pro $\delta \in \{0.01, 0.1, 1\}$ a za použití

(a) přirozeného intervalového rozšíření,

(b) mean value form,

(c) slope form. [5 b]

Úloha 5. Dřevěná koule má poloměr $1\,m$ a specifickou tíhu $g_{SP} = \frac{2}{3}$. Hloubka ponoření koule h je dána rovnicí

$$h^3 - 3h^2 + \frac{8}{3} = 0.$$

Nalezněte pomocí intervalových metod odhad (obálku) pro hodnotu h. (Specifická tíha je dána poměrem hustoty daného objektu a hustoty vody o stejném objemu $g_{SP} = \rho_{koule}/\rho_{voda}$.) [4 b]

Úloha 6. S využitím intervalových metod nalezněte obálku pro optimální hodnotu úlohy

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 \\ &x_1^2 + x_2^2 \le 1, \\ &x_1^2 + x_2 = 0. \end{aligned}$$

[4 b]