

1 Intervalová aritmetika

Úloha 1. Dokažte následující vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}$:

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$,

b) $\mathbf{x} = x_c + x_\Delta[-1, 1]$. [3 b]

Úloha 2. Magnitudu intervalu $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ definujeme jako

$$\text{mag}(\mathbf{x}) := \max\{|\bar{x}|, |\underline{x}|\}.$$

Ukažte, že pro magnitudu platí:

a) $\text{mag}(\mathbf{x}) = |x_c| + x_\Delta$,

b) $\text{mag}(\mathbf{xy}) \leq \text{mag}(\mathbf{x}) \cdot \text{mag}(\mathbf{y})$. [4 b]

Úloha 3. Kategorizujte algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +)$, $(\mathbb{IR}, -)$ a $(\mathbb{IR}, +, \cdot)$ dle asociativity, komutativity a distributivity intervalových operací. Dále rozhodněte, zda vzhledem k dané operaci existuje neutrální prvek a inverzní prvek pro každý interval. [6 b]

Úloha 4. Ukažte vlastnosti intervalové aritmetiky pro $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$:

a) Ukažte, že pokud $\mathbf{A} = A$ je bodová matice ($A_\Delta = 0$), potom $A(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = A\mathbf{B} + A\mathbf{C}$.

b) Rozhodněte, zda pro násobení intervalových matic platí $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

c) Určete (a zdůvodněte), kdy platí $\mathbf{A} - \mathbf{A} = 0$. [5 b]

Úloha 5. Rozhodněte, zda intervalová funkce $f: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ definovaná

$$f([a_c - a_\Delta, a_c + a_\Delta]) = \left[a_c - \frac{1}{2}a_\Delta, a_c + \frac{1}{2}a_\Delta \right]$$

je isotonní v inkluzi, t.j. zda pro všechny intervaly $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}$ platí $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \subseteq f(\mathbf{y})$. [2 b]

Úloha 6. Definujme vzdálenost intervalů jako

$$q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \max(|\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}|, |\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}|).$$

Pro intervalové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{IR}^n$ dále definujme vzdálenost jako

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1, \dots, n} q(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i).$$

Ukažte, že vzdálenostní funkce $Q: \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je metrika. [5 b]