

2 Intervalové lineární soustavy a regularita

Úloha 1. Následující vlastnosti jsou nutné pro regularitu intervalové matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Rozhodněte, které z podmínek jsou také postačující:

- a) Matice $A_{yz} = A^c + \text{diag}(y)A^\Delta \text{diag}(z)$ je regulární pro každé $y, z \in \{\pm 1\}^n$.
- b) Matice A^c a všechny matice A tvaru $a_{ij} \in \{\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}\}$ jsou regulární.
- c) Matice A^c a matice A_{yz} jsou regulární pro každé $y, z \in \{\pm 1\}^n$. [3 b]

Úloha 2. Rozhodněte, zda jsou následující intervalové matice regulární (použijte různé podmínky pro testování regularity):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [-2, 0] & [3, 5] \\ [-3, -2] & [-4, -2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [-3, -1] \\ [1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [2, 6] \\ [-4, -2] & [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad [4 \text{ b}]$$

Úloha 3. Navrhněte metodu, jak pro regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ najít intervalovou obálku množiny inverzních matic $\{A^{-1} : A \in \mathbf{A}\}$ a aplikujte ji na libovolnou regulární matici z Úlohy 2. [4 b]

Úloha 4. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Rozhodněte, zda vlastnost

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : |\underline{a}_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\bar{a}_{ij}|$$

je postačující podmínkou pro regularitu matice $\mathbf{A}$. Pokud ne, najděte protipříklad a navrhněte zesílenou podmínku, která již regularitu zaručí. [3 b]

Úloha 5. Intervalová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ je nezáporně invertibilní pokud platí $A^{-1} \geq 0$ pro každou matici $A \in \mathbf{A}$. Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\mathbf{A}$ je nezáporně invertibilní pokud splňuje podmínku

$$\rho(I_n - \underline{A}) < 1, \quad \bar{A} \leq I_n, \quad \forall i: a_{ii} = 1. \quad [4 \text{ b}]$$

Úloha 6. Rozhodněte, jaké jsou topologické vlastnosti množiny (slabých) řešení Σ intervalové soustavy nerovnic $\mathbf{A}x \leq \mathbf{b}$:

- a) Může být množina Σ nesouvislá?
- b) Může mít množina Σ jak omezené tak neomezené komponenty souvislosti?
- c) Může mít množina Σ více omezených komponent souvislosti?

Pokud ano, najděte příklad v $\mathbb{R}^2$ a načrtněte množinu řešení příslušné soustavy. [3 b]

Úloha 7. Popište a ilustруйте množinu slabých a silných řešení intervalové lineární soustavy:

$$\begin{pmatrix} [-3, 1] & [1, 2] \\ [-1, 1] & -2 \\ [1, 2] & [-2, 1] \\ -2 & [-1, 1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} [3, 4] \\ [3, 4] \\ [3, 4] \\ [3, 4] \end{pmatrix}. \quad [4 \text{ b}]$$