Příklad 1. Rozhodněte, zda je tělesem množina

a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
b) $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením,
c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ se sčítáním a násobením po složkách.

Příklad 2. Spočítejte v $\mathbb{Z}_5$ hodnoty $3 + 4$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$.

Příklad 3. Spočítejte v $\mathbb{Z}_{17}$ hodnoty mocnin $2^{101}, 3^{1001}$ a $4^{1000001}$.

Příklad 4. Řešte soustavy rovnic bez výměny řádků:

$$\text{a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2, \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_7.$$

Příklad 5. Invertujte matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$.

Příklad 6. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení definujeme po složkách.

Příklad 7. Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozhodněte, zda $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$.

Příklad 8. Definujte lineární kombinaci a rozhodněte, zda

a) vektor $(4, -1, 1)$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)$ a $(1, 2, 1)$,
b) jsou vektory $(1, 3, 2), (2, 5, 3), (2, 3, 1)$ lineárně nezávislé.

Domácí úkol č. 4: Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny $M, N \subseteq V$ platí následující vlastnosti lineárního obalu (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

a) $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$, [1 b]
b) $M \subseteq N \Rightarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$, [1 b]
c) $M \subseteq N \Leftarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$. [1 b]