Příklad 1. Najděte bázi a určete dimenzi prostoru generovaného vektory $(2,4,4,4)$, $(-3,-4,2,0)$, $(5,7,-2,1)$ pomocí sloupcového a řádkového prostoru matice.

Příklad 2. Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Zjistěte, zda se rovnají prostory $\mathrm{span}\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ a $\mathrm{span}\{(2,1,3),(1,0,2)\}$.

Příklad 4. Určete dimenzi prostoru $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

a) $\mathcal{R}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$,
b) $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow A^2 = 0$.

Příklad*. Město Lichosudov má n obyvatel a m klubů. Každý klub má lichý počet členů, ale každé dva kluby mají v průniku sudý počet členů. Dokažte $m \leq n$. *Hint: Využijte lineární nezávislost vektorů v* $\mathbb{Z}_2^n$.

Domácí úkol č. 6: Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,
b) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ právě tehdy, když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.