Příklad 1. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ báze

$$B_1 = \langle (1,1,1), (0,1,-1), (2,0,1) \rangle, \quad B_2 = \langle (3,2,2), (1,0,1), (1,2,2) \rangle.$$

a) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do kanonické báze.
b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B_1.
c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)$ vzhledem k bázi B_1.
d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 k bázi B_1.

Příklad 2. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané maticí

$$_{B_1}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B_1 = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle$. Najděte matici zobrazení $_{B_2}[f]_{B_2}$ pro $B_2 = \langle 1, x, 1+x^2 \rangle$.

Příklad 3. Najděte isomorfismus mezi prostory:

a) $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$,
c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ s předpisem

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)$$

prosté a zda je „na“.

Příklad 5. Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1), \quad f(0,1,1) = (-1,0), \quad f(1,1,0) = (1,0).$$

Určete dimenzi obrazu a jádra f a najděte jejich báze.

Domácí úkol č. 8: Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení prostá a „na“:

a) zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ s předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc,$$

b) zobrazení $g\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ s předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}.$$

Příklad 1. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ báze

$$B_1 = \langle (1,1,1), (0,1,-1), (2,0,1) \rangle, \quad B_2 = \langle (3,2,2), (1,0,1), (1,2,2) \rangle.$$

a) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do kanonické báze.
b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B_1.
c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)$ vzhledem k bázi B_1.
d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 k bázi B_1.

Příklad 2. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané maticí

$${}_{B_1}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B_1 = \langle 1, 1+x, x^2 \rangle$. Najděte matici zobrazení ${}_{B_2}[f]_{B_2}$ pro $B_2 = \langle 1, x, 1+x^2 \rangle$.

Příklad 3. Najděte isomorfismus mezi prostory:

a) $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$,
c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ s předpisem

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)$$

prosté a zda je „na“.

Příklad 5. Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1), \quad f(0,1,1) = (-1,0), \quad f(1,1,0) = (1,0).$$

Určete dimenzi obrazu a jádra f a najděte jejich báze.

Domácí úkol č. 8: Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení prostá a „na“:

a) zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ s předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc,$$

b) zobrazení $g\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ s předpisem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}.$$