Příklad 1. Pomocí Choleského rozkladu řešte soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Příklad 2. Otestujte Gaussovou eliminací positivní definitnost matic

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Otestujte Sylvestrovým kriteriem positivní (semi-)definitnost matic

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní. Dokažte:

a) $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

b) $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

c) pokud $a_{ii} = 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, pak je i-tý sloupec a řádek matice A nulový.

Příklad 5. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je následující matice positivně definitní:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Buď A positivně semidefinitní a $p(\lambda)$ polynom takový, že $p(\lambda) \geq 0$ pro $\lambda \geq 0$. Ukažte, že $p(A)$ je positivně semidefinitní.

Domácí úkol č. 10: Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí

a) Gaussovy eliminace (odstupňovaný tvar s nezápornou diagonálou),

b) Sylvestrova kriteria pro positivní definitnost (nezáporné determinanty hlavních vedoucích podmatic).

[2 b]

Příklad 1. Pomocí Choleského rozkladu řešte soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Příklad 2. Otestujte Gaussovou eliminací positivní definitnost matic

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Otestujte Sylvestrovým kriteriem positivní (semi-)definitnost matic

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní. Dokažte:

a) $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

b) $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

c) pokud $a_{ii} = 0$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak je i-tý sloupec a řádek matice A nulový.

Příklad 5. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je následující matice positivně definitní:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Buď A positivně semidefinitní a $p(\lambda)$ polynom takový, že $p(\lambda) \geq 0$ pro $\lambda \geq 0$. Ukažte, že $p(A)$ je positivně semidefinitní.

Domácí úkol č. 10: Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí

a) Gaussovy eliminace (odstupňovaný tvar s nezápornou diagonálou),

b) Sylvestrova kriteria pro positivní definitnost (nezáporné determinanty hlavních vedoucích podmatic).

[2 b]