**Příklad 1.** Buď $V$ vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Z definice ortogonálního doplňku dokažte, že platí:

a) $M^\perp$ je podprostor $V$,

b) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$.

**Příklad 2.** Pomocí ortonormální báze najděte projekci vektoru $x = (1, 2, 4, 5)$ do podprostoru $V$ generovaného vektory

$$x_1 = (1, 0, 1, 0),\ x_2 = (1, 1, 1, 1),\ x_3 = (1, 0, 0, 1)$$

a určete vzdálenost vektoru $x$ od $V$ při standardním skalárním součinu. *(Hint: Příklad 1 z 2. cvičení.)*

**Příklad 3.** Buď $V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$. Rozložte vektor $u = (3, 2, 6)$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V$ a $w \in V^\perp$.

**Příklad 4.** Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonální doplněk prostoru $\operatorname{span}\{(1, 2, 3), (1, -1, 0)\}$.

**Příklad 5.**

a) Sestrojte matici projekce (jakožto lineárního zobrazení) do prostoru $V$ generovaného vektorem $(2, 1, 1)$.

b) Spočítejte projekci vektorů $(4, 2, 2)$ a $(0, 1, -1)$ do prostoru $V$.

**Příklad 6.** Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

**Domácí úkol č. 3:** Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^n$ odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti $c \in \mathbb{R}^n$ od

a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, [1 b]

b) podprostoru $a^T x = b$, kde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$. [1 b]

**Příklad 1.** Buď $V$ vektorový prostor a $M, N \subseteq V$. Z definice ortogonálního doplňku dokažte, že platí:

a) $M^\perp$ je podprostor $V$,

b) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$.

**Příklad 2.** Pomocí ortonormální báze najděte projekci vektoru $x = (1,2,4,5)$ do podprostoru $V$ generovaného vektory

$$x_1 = (1,0,1,0),\ x_2 = (1,1,1,1),\ x_3 = (1,0,0,1)$$

a určete vzdálenost vektoru $x$ od $V$ při standardním skalárním součinu. *(Hint: Příklad 1 z 2. cvičení.)*

**Příklad 3.** Buď $V = \operatorname{span}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$. Rozložte vektor $u = (3,2,6)$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V$ a $w \in V^\perp$.

**Příklad 4.** Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^3$ najděte ortogonální doplněk prostoru $\operatorname{span}\{(1,2,3),(1,-1,0)\}$.

**Příklad 5.**

a) Sestrojte matici projekce (jakožto lineárního zobrazení) do prostoru $V$ generovaného vektorem $(2,1,1)$.

b) Spočítejte projekci vektorů $(4,2,2)$ a $(0,1,-1)$ do prostoru $V$.

**Příklad 6.** Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

**Domácí úkol č. 3:** Při standardním skalárním součinu v $\mathbb{R}^n$ odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti $c \in \mathbb{R}^n$ od

a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, [1 b]

b) podprostoru $a^T x = b$, kde $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ a $b \in \mathbb{R}$. [1 b]