Příklad 1. Určete objem elipsoidu, který je obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení s předpisem $f(1,3,1) = (3,1,0)$, $f(1,0,3) = (1,0,2)$, $f(1,1,1) = (4,1,5)$.

Příklad 2. Nalezněte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory pro následující matice lineárních zobrazení v rovině. Jaká je geometrická interpretace těchto vlastních čísel a vektorů?

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Určete charakteristický polynom a spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic αA, A^2, A^T, $A + \alpha I_n$.

Příklad 5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $3, -4, 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo matice A.

Příklad 6. Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Domácí úkol č. 6: Určete, jaká mohou být vlastní čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující

a) $A^2 = A$, [1 b]

b) $A^k = 0$. [1 b]

Příklad 1. Určete objem elipsoidu, který je obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení s předpisem $f(1,3,1) = (3,1,0)$, $f(1,0,3) = (1,0,2)$, $f(1,1,1) = (4,1,5)$.

Příklad 2. Nalezněte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory pro následující matice lineárních zobrazení v rovině. Jaká je geometrická interpretace těchto vlastních čísel a vektorů?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Určete charakteristický polynom a spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic αA, A^2, A^T, $A + \alpha I_n$.

Příklad 5. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $3, -4, 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo matice A.

Příklad 6. Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Domácí úkol č. 6: Určete, jaká mohou být vlastní čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující

a) $A^2 = A$, [1 b]

b) $A^k = 0$. [1 b]