

**Příklad 1.** Najděte spektrální rozklad symetrických matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 2.** Matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je antisymetrická, pokud platí  $A^T = -A$ .

- Dokažte, že vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.
- Dokažte, že  $I_n + A$  je regulární pro antisymetrickou matici  $A$ .
- Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Příklad 3.** Rozhodněte pomocí Gerschgorinových disků:

- Je následující matice regulární?

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Má následující matice alespoň dvě reálná vlastní čísla?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Příklad 4.** Použijte mocninovou metodu s počátečním vektorem  $x_0 = (1, 1)^T$  pro aproximaci dominantního vlastního čísla a vlastního vektoru matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 5.** Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

**Domácí úkol č. 8:** Pro matici  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  určete všechny matice  $\sqrt{A}$ , tj. matice, pro které platí  $(\sqrt{A})^2 = A$ . [2 b]

**Příklad 1.** Najděte spektrální rozklad symetrických matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 2.** Matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je antisymetrická, pokud platí  $A^T = -A$ .

- Dokažte, že vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.
- Dokažte, že  $I_n + A$  je regulární pro antisymetrickou matici  $A$ .
- Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Příklad 3.** Rozhodněte pomocí Gerschgorinových disků:

- Je následující matice regulární?

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Má následující matice alespoň dvě reálná vlastní čísla?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Příklad 4.** Použijte mocninovou metodu s počátečním vektorem  $x_0 = (1, 1)^T$  pro aproximaci dominantního vlastního čísla a vlastního vektoru matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 5.** Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

**Domácí úkol č. 8:** Pro matici  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  určete všechny matice  $\sqrt{A}$ , tj. matice, pro které platí  $(\sqrt{A})^2 = A$ . [2 b]