Příklad 1. Ověřte třemi různými způsoby positivní semidefinitnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relace $\prec, \preceq$ předpisem $A \prec B$ (resp. $A \preceq B$) pokud $B - A$ je positivně definitní (resp. positivně semidefinitní).

a) Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání (t.j. reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická).

b) Nechť $0 \preceq A$ a $0 \prec B$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A + B$.

c) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A^{-1}$.

d) Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $V^T AV \preceq V^T BV$ pro $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

e) Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $A^2 \preceq B^2$.

Příklad 3. Otestujte pomocí rekurentního vzorečku positivní definitnost matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Najděte Choleského rozklad pro matice z příkladu 4. Je tento rozklad jednoznačný?

Příklad 5. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Dokažte, že matice $S^T AS$ je positivně definitní.

Domácí úkol č. 9: Rozhodněte, zda je následující matice $n \times n$ positivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2 b]

Příklad 1. Ověřte třemi různými způsoby positivní semidefinitnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2. Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relace $\prec, \preceq$ předpisem $A \prec B$ (resp. $A \preceq B$) pokud $B - A$ je positivně definitní (resp. positivně semidefinitní).

a) Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání (t.j. reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická).

b) Nechť $0 \preceq A$ a $0 \prec B$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A + B$.

c) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A^{-1}$.

d) Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $V^T AV \preceq V^T BV$ pro $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

e) Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $A^2 \preceq B^2$.

Příklad 3. Otestujte pomocí rekurentního vzorečku positivní definitnost matic

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Najděte Choleského rozklad pro matice z příkladu 4. Je tento rozklad jednoznačný?

Příklad 5. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Dokažte, že matice $S^T AS$ je positivně definitní.

Domácí úkol č. 9: Rozhodněte, zda je následující matice $n \times n$ positivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2 b]