

Bonusový úkol 1. Buď $\|\cdot\|$ norma nad \mathbb{R} a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma. [1 b]

Bonusový úkol 2. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

[1 b]

Bonusový úkol 3. Najděte adjungovanou matici k permutační matici P (pro danou permutaci $p \in S_n$ definujeme $P_{ij} = 1$ pokud $p(i) = j$, jinak $P_{ij} = 0$). [1 b]

Bonusový úkol 4. Necht pro dané matice $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí $A \sim B$ a $C \sim D$, kde \sim značí relaci podobnosti. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti (dokažte, nebo najděte protipříklad):

a) $(A + C) \sim (B + D)$, [0.5 b]

b) $AC \sim BD$. [0.5 b]

Bonusový úkol 5. Rozhodněte, zda je následující matice $n \times n$ pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1 b]

Bonusový úkol 1. Buď $\|\cdot\|$ norma nad \mathbb{R} a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma. [1 b]

Bonusový úkol 2. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

[1 b]

Bonusový úkol 3. Najděte adjungovanou matici k permutační matici P (pro danou permutaci $p \in S_n$ definujeme $P_{ij} = 1$ pokud $p(i) = j$, jinak $P_{ij} = 0$). [1 b]

Bonusový úkol 4. Necht pro dané matice $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí $A \sim B$ a $C \sim D$, kde \sim značí relaci podobnosti. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti (dokažte, nebo najděte protipříklad):

a) $(A + C) \sim (B + D)$, [0.5 b]

b) $AC \sim BD$. [0.5 b]

Bonusový úkol 5. Rozhodněte, zda je následující matice $n \times n$ pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1 b]