

Příklad 1. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je následující matice pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte Choleského rozklad pro matice

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Pomocí Choleského rozkladu řešte soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Příklad 4. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relace \prec, \preceq předpisem $A \prec B$ (resp. $A \preceq B$) pokud $B - A$ je pozitivně definitní (resp. pozitivně semidefinitní).

- Ukažte, že \preceq je relace částečného uspořádání (t.j. reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická).
- Nechť $0 \preceq A$ a $0 \prec B$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A + B$.
- Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A^{-1}$.
- Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $V^T A V \preceq V^T B V$ pro $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $A^2 \preceq B^2$.

Příklad 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Dokažte, že matice $S^T A S$ je pozitivně definitní.

Příklad 1. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je následující matice pozitivně definitní:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Najděte Choleského rozklad pro matice

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Pomocí Choleského rozkladu řešte soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Příklad 4. Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relace \prec, \preceq předpisem $A \prec B$ (resp. $A \preceq B$) pokud $B - A$ je pozitivně definitní (resp. pozitivně semidefinitní).

- Ukažte, že \preceq je relace částečného uspořádání (t.j. reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická).
- Nechť $0 \preceq A$ a $0 \prec B$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A + B$.
- Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda platí $0 \prec A^{-1}$.
- Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $V^T A V \preceq V^T B V$ pro $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda platí $A^2 \preceq B^2$.

Příklad 6. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Dokažte, že matice $S^T A S$ je pozitivně definitní.