

Příklad 1. Otestujte Gaussovou eliminací pozitivní definitnost matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Otestujte Sylvestrovým kriteriem pozitivní (semi-)definitnost matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování pozitivní semidefinitnosti pomocí

- rekurentního vzorečku ($\alpha > 0$, upravená podmatice pozitivně semidefinitní),
- Gaussovy eliminace (odstupňovaný tvar s nezápornou diagonálou),
- Sylvestrova kriteria pro pozitivní definitnost (nezáporné determinanty hlavních vedoucích podmatic).

Příklad 4. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně semidefinitní. Dokažte:

- $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- pokud $a_{ii} = 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, pak je i -tý sloupec a řádek matice A nulový.

Příklad 5. Definují následující předpisy bilineární formu $b(x, y): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

- $b(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$
- $b(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$
- $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$

Příklad 1. Otestujte Gaussovou eliminací pozitivní definitnost matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Otestujte Sylvestrovým kriteriem pozitivní (semi-)definitnost matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování pozitivní semidefinitnosti pomocí

- rekurentního vzorečku ($\alpha > 0$, upravená podmatice pozitivně semidefinitní),
- Gaussovy eliminace (odstupňovaný tvar s nezápornou diagonálou),
- Sylvestrova kriteria pro pozitivní definitnost (nezáporné determinanty hlavních vedoucích podmatic).

Příklad 4. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně semidefinitní. Dokažte:

- $|a_{ij}| \leq (a_{ii} + a_{jj})/2$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- pokud $a_{ii} = 0$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, pak je i -tý sloupec a řádek matice A nulový.

Příklad 5. Definují následující předpisy bilineární formu $b(x, y): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

- $b(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$
- $b(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$
- $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$