Příklad 1. Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Příklad 2. Ověřte, že matice Q je ortogonální a matice U je unitární:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Dokažte, že následující matice jsou ortogonální:

a) Householderova matice $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$ pro $u \neq 0$,

b) Givensova matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Příklad 4. Najděte všechny ortogonální (resp. unitární) diagonální matice řádu n. Kolik jich je?

Příklad 5. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

a) Bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je ortogonální.

b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Příklad 6. Platí $AA^T = I$ (resp. $A^T A = I$) pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jejíž sloupce tvoří ortonormální systém?

Příklad 1. Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Příklad 2. Ověřte, že matice Q je ortogonální a matice U je unitární:

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Dokažte, že následující matice jsou ortogonální:

a) Householderova matice $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$ pro $u \neq 0$,

b) Givensova matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Příklad 4. Najděte všechny ortogonální (resp. unitární) diagonální matice řádu n. Kolik jich je?

Příklad 5. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální matice. Rozhodněte, zda platí následující vlastnosti:

a) Bloková matice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je ortogonální.

b) Matice $A + B$ je ortogonální.

Příklad 6. Platí $AA^T = I$ (resp. $A^T A = I$) pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jejíž sloupce tvoří ortonormální systém?