Příklad 1. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Pomocí Gaussovy eliminace spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je antisymetrická, pokud platí $A^T = -A$. Dokažte, že pro liché n je antisymetrická matice singulární.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Příklad 5. Spočítejte determinant následujících matic Laplaceovým rozvojem:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ b & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a_n \end{pmatrix}.$$

Příklad 1. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Pomocí Gaussovy eliminace spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3. Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je antisymetrická, pokud platí $A^T = -A$. Dokažte, že pro liché n je antisymetrická matice singulární.

Příklad 4. Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Příklad 5. Spočítejte determinant následujících matic Laplaceovým rozvojem:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6. Spočítejte determinanty matic:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ b & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a_n \end{pmatrix}.$$