

Příklad 1. Určete Jordanovu normální formu matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ určete všechny matice \sqrt{A} , tj. matice, pro které platí $(\sqrt{A})^2 = A$.

Příklad 3. Najděte spektrální rozklad symetrických matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je antisymetrická, pokud platí $A^T = -A$.

- Dokažte, že vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.
- Dokažte, že $I_n + A$ je regulární pro antisymetrickou matici A .
- Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 5. Rozhodněte pomocí Gerschgorinových disků:

- Je následující matice regulární?

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Má následující matice alespoň dvě reálná vlastní čísla?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Příklad 1. Určete Jordanovu normální formu matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ určete všechny matice \sqrt{A} , tj. matice, pro které platí $(\sqrt{A})^2 = A$.

Příklad 3. Najděte spektrální rozklad symetrických matic

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je antisymetrická, pokud platí $A^T = -A$.

- Dokažte, že vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.
- Dokažte, že $I_n + A$ je regulární pro antisymetrickou matici A .
- Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 5. Rozhodněte pomocí Gerschgorinových disků:

- Je následující matice regulární?

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Má následující matice alespoň dvě reálná vlastní čísla?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 6. Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?