1. Skalární součin, norma

Cv. 1.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

  Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \text{ a zároveň } x_2 = 0.$$

  To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2),\end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Cv. 1.2 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x,y\rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1,0)^T$, $y = (i,0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x+y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.3 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\mathrm{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\mathrm{trace}(A)^2 \le n \cdot \mathrm{trace}(A^T A)$.

Řešení:

(a) Pišme

$$\mathrm{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (A^T)_{ij} B_{ji}. = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_{ji} B_{ji}.$$

Čili výraz $\mathrm{trace}(A^T B)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{22}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn}).$$

(b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B\rangle|^2 \le \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ dostane podobu

$$\mathrm{trace}(A^T B)^2 \le \mathrm{trace}(A^T A)\,\mathrm{trace}(B^T B).$$

(c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A := I_n$, $B := A$ a tím pádem dostaneme

$$\operatorname{trace}(A)^2 \leq \operatorname{trace}(I_n) \cdot \operatorname{trace}(A^T A) = n \cdot \operatorname{trace}(A^T A).$$

Cv. 1.4 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Řešení:

Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin je tvaru

$$|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y. Konkrétně zvolíme

$$x = \left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)^T, \quad y = \left(1/\sqrt{a_1}, \ldots, 1/\sqrt{a_n}\right)^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n 1\right|^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Cv. 1.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

  $$x_1 - 2x_2 = 3x_1 - 4x_2 = 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

  Tato situace nastane jen pro $x_1 = x_2 = 0$.
- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ zjevně platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\leq |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 1.6 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:
Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cv. 1.7 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2. \end{aligned}$$

Řešení:
Pro ilustraci ukážeme první dvě nerovnosti, další vztahy se dokáží analogicky. Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$