4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Řešení:

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T \right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^T u} (u u^T)^T = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^T H(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T \right) \left(I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T \right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^T u} u u^T + \frac{4}{(u^T u)^2} u u^T u u^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^T u} u u^T + \frac{4}{(u^T u)^2} u (u^T u) u^T = I_n. \end{aligned}$$

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože to by muselo $\frac{2}{u^T u} u u^T = 0$.

Cv. 4.2 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Řešení:
Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků E_{ij}.
2. Matice $E_i(\pm 1)$ vynásobení řádku i číslem ± 1.

Cv. 4.3 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1}.

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Řešení:

(a) Součin PA zpermutuje řádky matice A podle permutace p.

Důkaz. Řádek $p(i)$ matice PA má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice PA je i-tý řádek původní matice A.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle p.

(c) P je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice PQ.

Důkaz (z významu). Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice PQ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace q a pak podle permutace p, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.

Důkaz (z definice). Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když i-tý řádek matice P i j-tý sloupec matice Q jsou stejné jednotkové vektory, např e_k. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^T P = I_n$. Tudíž permutační matice P^T odpovídá permutaci p^{-1}.

(f) Součin AP zpermutuje sloupce matice A podle permutace p^{-1}.

Důkaz. Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^T A^T)^T$, čili matice $P^T A^T$ zpermutuje řádky matice A^T podle permutace p^{-1}.

Cv. 4.4 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

Řešení:

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce a sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.