5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Nechť $\pi = (1,5,3)(2,6)(4,8,7,9)$ a $\sigma = (1,2,7)(3,5)(4,9,6)(8)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočtěte:

(a) složení $\pi \circ \sigma$ a složení $\sigma \circ \pi$,

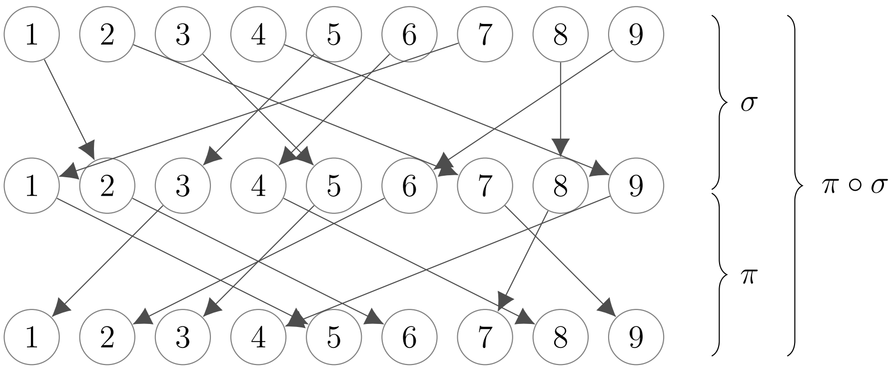
(b) inverzní permutace π^{-1} a σ^{-1}.

Řešení:

(a) Připomeňme definici skládání permutací:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : (\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i)).$$

Zakresleme permutace π a σ schématicky:



Dostáváme $\pi \circ \sigma = (1,6,8,7,5)(2,9)(3,5)(4)$.
Obdobně můžeme spočítat $\sigma \circ \pi = (1,3,2,4,8)(5)(6,7)(9)$.

(b) Nahlédneme, že pořadí prvků v cyklech inverzní permutace je otočené. Tedy získáváme $\pi^{-1} = (1,3,5)(2,6)(4,9,7,8)$ a $\sigma^{-1} = (1,7,2)(3,5)(4,6,9)(8)$.

Cv. 5.2 Jaké znaménko mají dané permutace?

(a) permutace $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1$,

(b) permutace $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 7,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 6$,

(c) identická permutace $id \in S_n$, pro kterou $id(i) = i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$,

(d) transpozice (permutace, která zamění přesně dva prvky, třeba $\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 1,\ \tau(n) = n$ pro všechny $n > 2$).

Řešení:

(a) Permutace obsahuje jeden cyklus $(1,2,3)$, tedy $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{3-1} = 1$.

(b) Permutace je tvořena dvěma cykly $(1,2,3,4)$ a $(5,7,6)$ tedy $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{7-2} = -1$.

(c) Každé číslo tvoří samo o sobě cyklus a identickou permutaci tedy můžeme rozložit jako $(1)(2)\dots(n)$. Máme tedy n cyklů a znaménko permutace je $(-1)^{n-n} = 1$.

(d) Dvě prohozená čísla tvoří cyklus délky dva a zbylá čísla tvoří každé triviální cyklus délky jedna. Uvedený příklad transpozice můžeme zapsat jako $(1,2)(3)(4)\dots(n)$. Máme tedy $n-1$ cyklů a znaménko permutace je proto $(-1)^{n-(n-1)} = -1$.

Cv. 5.3 Nechť $\pi = (1,3)(2,9,7,6)(4)(5,8)$ a $\sigma = (1,4,5)(3,6,9,8,7)(2)$. Určete:

(a) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$,

(b) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi)$,

(c) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ a $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Řešení:

(a) Permutace π je na $n = 9$ prvcích a je složena ze 4 cyklů. Tedy $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{9-4} = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{9-3} = 1$.

(b) Znaménko složené permutace je součin znamének jednotlivých permutací. Proto dostáváme $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot 1 = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = -1$.

(c) Z definice složení permutací dostáváme $\pi \circ \pi^{-1} = id$. Víme, že $\operatorname{sgn}(id) = 1$. Dostáváme tedy, že $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi) = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$.

Cv. 5.4 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Laplaceova rozvoje podle řádku a pomocí Gaussovy eliminace.

(a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) Budeme počítat z definice:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\
&\quad - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} \\
&= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -9
\end{aligned}$$

Determinant matice je -9.

(b) Budeme řešit pomocí Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= -1\det\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det se násobí } -1\text{)} \\
&= -2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det se zmenší 2-krát)} \\
&= -2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det se nemění)} \\
&= -2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det se nemění)} \\
&= 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det se násobí } -1\text{)} \\
&= 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}. \\
& && \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)}
\end{aligned}$$

Dostáváme horní trojúhelníkovou matici. Existuje jediná permutace σ taková, že

$$\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \neq 0,$$

a to identita. Determinant vzniklé horní trojúhelníkové matice je $(-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 30$. A tedy determinant původní matice je 60.

(c) Použijeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Následný výpočet determinantů matic velikosti 2×2 provedeme z definice.

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1) + 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Determinant matice je 2.

(d) Nejprve použijeme elementární řádkové úpravy a upravíme matici následovně. Využíváme pouze elementární úpravu „přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému“. Tato úprava nemění determinant, a tak získáváme:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \det \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že permutace $\sigma \in S_3$ přispívá k celkovému součtu v hledaném determinantu *nenulovou* hodnotou právě tehdy, když vybírá první sloupec v prvním řádku a třetí sloupec ve třetím řádku, tj. $\sigma(1) = 1$ a $\sigma(3) = 3$. Taková permutace v S_3 je však právě jedna – identická permutace. Tedy determinant výsledné matice je roven součinu jejích diagonálních prvků $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Vzhledem k tomu, že provedené řádkové úpravy neměnily determinant, je determinant původní matice také 1001.

Cv. 5.5 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je tudíž roven $n!$.

(b) Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostáváme matici

$$B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce. Dostaneme

$$B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + \sum_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}.$$

Determinant je roven $(a_1 + \ldots + a_n + x)x^{n-1}$.