5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Nechť $\pi = (1,5,3)(2,6)(4,8,7,9)$ a $\sigma = (1,2,7)(3,5)(4,9,6)(8)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočtěte:

(a) složení $\pi \circ \sigma$ a složení $\sigma \circ \pi$,

(b) inverzní permutace π^{-1} a σ^{-1}.

Cv. 5.2 Jaké znaménko mají dané permutace?

(a) permutace $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1$,

(b) permutace $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 7,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 6$,

(c) identická permutace $id \in S_n$, pro kterou $id(i) = i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$,

(d) transpozice (permutace, která zamění přesně dva prvky, třeba $\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 1,\ \tau(n) = n$ pro všechny $n > 2$).

Cv. 5.3 Nechť $\pi = (1,3)(2,9,7,6)(4)(5,8)$ a $\sigma = (1,4,5)(3,6,9,8,7)(2)$. Určete:

(a) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$,

(b) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi)$,

(c) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ a $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Cv. 5.4 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Laplaceova rozvoje podle řádku a pomocí Gaussovy eliminace.

(a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Cv. 5.5 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$