6. Determinanty – použití

Cv. 6.1 Geometrickou interpretací determinantu je objem. Přesněji absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje velikost objektů[1]. Tedy pokud máme matice 2×2, absolutní hodnota jejich determinantu představuje kolikrát se zvětší obsah rovinného geometrického útvaru (například jednotkového čtverce) po provedené transformaci. Absolutní hodnota determinantu matice velikosti 3×3, pak udává kolikrát se zvětší objem geometrického 3 dimenzionálního útvaru (například krychle) provedením lineární transformace dané příslušnou maticí.

Zároveň lze na determinant nahlížet jako na obsah rovnoběžnostěnu daného sloupci matice. Pokud příslušnou lineární transformaci provedeme na čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ – čtverec reprezentovaný I_2, bude tento čtverec zobrazen na rovnoběžnostěn daný sloupci matice.

Za cvičení spočtěte následující determinanty a ověřte si intuici pro následující matice:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) V tomto případě lineární zobrazení zobrazí každou plochu na sebe samu. Tedy plochy se nemění a očekáváme, že determinant bude 1.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

(b) Toto lineární zobrazení vezme čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na obdélník jehož strany jsou $(2,0)^T$ a

[1] Doporučujeme zhlédnout 10-minutové video o determinantech z kanálu „Three blue, one brown“, viz `https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk`

$(0,1)^T$ (obsah je 2). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 2-krát a očekáváme, že $\det(B) = 2$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(B) = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2.$$

(c) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na čtverec jehož strany jsou $(2,0)^T$ a $(0,2)^T$ (obsah je 4). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 4-krát a očekáváme, že $\det(C) = 4$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(C) = C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4.$$

(d) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na rovnoběžník jehož strany jsou $(1,0)^T$ a $(2,1)^T$. Obsah rovnoběžníku je stále 1 (představte si, že vznikl tak, že vezmete stěnu vystavěnou z kostek a poté se opřete o její levou stranu, posunete jednotlivé kostky vůči sobě a stěnu zkosíte, ale obsah zůstane zachován). Tedy zobrazení zachovává plochy a očekáváme, že $\det(D) = 1$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(D) = D_{1,1}D_{2,2} - D_{1,2}D_{2,1} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

(e) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na úsečku danou vektorem $(1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že jsme zobrazili na vlastní podprostor $\mathbb{R}^2$ je obsah roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(E) = E_{1,1}E_{2,2} - E_{1,2}E_{2,1} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

(f) Pro matice velikosti 3×3 platí podobná geometrická intuice, pouze místo obsahu udává determinant objem. Zdůrazníme poslední případ (lineární zobrazení na podprostor) i pro matice 3×3.

Toto lineární zobrazení vezme krychli danou vektory $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$ (objem krychle je 1) a zobrazí ji na čtverec daný vektory $(1,0,0)^T$ a $(0,1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že obraz zobrazení je podprostor $\mathbb{R}^3$, získáváme 2D útvar a jeho objem je tedy roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\begin{aligned}
\det(F) &= F_{1,1}F_{2,2}F_{3,3} + F_{1,2}F_{2,3}F_{3,1} + F_{1,3}F_{2,1}F_{3,2} \\
&\quad - F_{1,1}F_{2,3}F_{3,2} - F_{1,2}F_{2,1}F_{3,3} - F_{1,3}F_{2,2}F_{3,1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cv. 6.2 Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Adjungovaná matice má složky: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (Pozor, všimněte si prohození indexů!).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$.

Nad $\mathbb{R}$ počítáme adjungovanou matici následovně. Nejprve spočteme determinanty podmatic:

$$\begin{aligned}
\det(A^{1,1}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{2,1}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,\\
\det(A^{3,1}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,\\
\det(A^{1,2}) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,\\
\det(A^{2,2}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{3,2}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2,\\
\det(A^{1,3}) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,\\
\det(A^{2,3}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{3,3}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Dostáváme adjungovanou matici:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)\cdot(-1) & -1 \\ (-1)\cdot(-2) & 1 & (-1)\cdot 2 \\ -2 & (-1)\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme determinant matice A. Využije rozvoje podle řádků a determinantů již spočtených výše. Dostáváme

$$\det(A) = 1\cdot\det(A^{1,1}) + 0\cdot\det(A^{1,2}) + 1\cdot\det(A^{1,3}) = 1 - 2 = -1$$

Konečně adjungovanou matici vynásobíme $\frac{1}{\det(A)} = -1$ a získáme inverzní matici:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obdobně můžeme počítat nad $\mathbb{Z}_5$, pouze všechny kroky provádíme modulo 5.

$$|A| = -1 = 4, \quad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.3 Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Využijeme Kritérium regularity, které říká, že A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Spočteme determinant:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2a \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 5-a & -2 \\ 2+3a & 4 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 5-a & -1 \\ 2+3a & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2a(-4+4) - 3((5-a)4 - (-2)(2+3a)) - ((5-a)2 - (-1)(2+3a)) \\ &= 35a - 84. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že A je singulární právě tehdy, když $a = \frac{84}{35} = \frac{12}{5}$.

Cv. 6.4 Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Řešení:
Nejprve pomocí Gaussovy eliminace spočteme determinant A.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-7) = -7. \end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice.

1) Dopočítáme první složku výsledného vektoru (nahrazujeme první sloupec):

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Rozvoj dle 2. sloupce)} \\
&= (-1)(-6\cdot 3-(-2)\cdot 10)+(7\cdot 3-3\cdot 10)+(7\cdot(-2)-3\cdot(-6)) \\
&= -(-18+20)+(21-30)+(-14+18) = -2-9+4=-7
\end{aligned}$$

Dostáváme $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$.

2) Dopočítáme druhou složku výsledného vektoru (nahrazujeme druhý sloupec):

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} &= \det -\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det -\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 40 & 15 \end{pmatrix} = \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7.
\end{aligned}$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

3) Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14.
\end{aligned}$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Závěr: Řešením soustavy je vektor $x = (1, -1, 2)^T$.