6. Determinanty – použití

Cv. 6.1 Geometrickou interpretací determinantu je objem. Přesněji absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje velikost objektů[1]. Tedy pokud máme matice 2×2, absolutní hodnota jejich determinantu představuje kolikrát se zvětší obsah rovinného geometrického útvaru (například jednotkového čtverce) po provedené transformaci. Absolutní hodnota determinantu matice velikosti 3×3, pak udává kolikrát se zvětší objem geometrického 3 dimenzionálního útvaru (například krychle) provedením lineární transformace dané příslušnou maticí.

Zároveň lze na determinant nahlížet jako na obsah rovnoběžnostěnu daného sloupci matice. Pokud příslušnou lineární transformaci provedeme na čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ – čtverec reprezentovaný I_2, bude tento čtverec zobrazen na rovnoběžnostěn daný sloupci matice.

Za cvičení spočtěte následující determinanty a ověřte si intuici pro následující matice:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 6.2 Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.3 Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1]Doporučujeme zhlédnout 10-minutové video o determinantech z kanálu „Three blue, one brown“, viz `https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk`

Cv. 6.4 Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$