

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\text{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

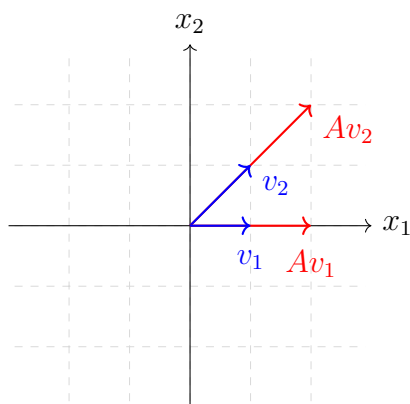
(d) $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x , tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f .

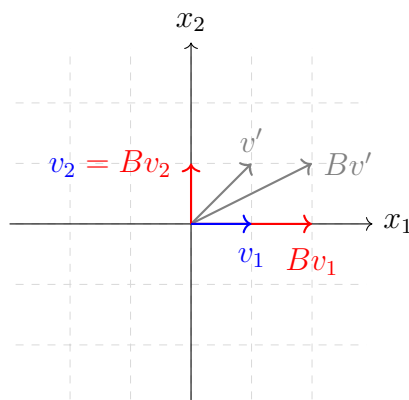


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



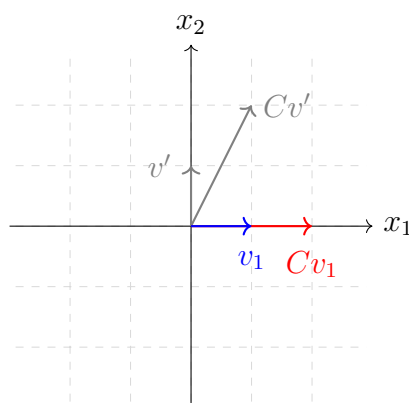
- (c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f((x_1, x_2)^T) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1 , protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f((\alpha, 0)^T) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

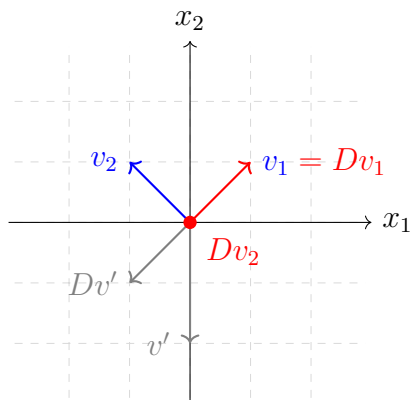
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



- (d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f((x_1, x_2)^T) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D . Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem \mathbb{C} . Jsou vlastní vektory jednoznačné?

- (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,
- (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
- (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

- (a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.

Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A , jsou hodnoty $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = -7$.

Vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ najdeme jako bázi jádra matice $A - \lambda I_n$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 6 \\ 6 & -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

kteřou tvoří např. vektor $x_1 = (3, 2)^T$. Podobně pro $\lambda_2 = -7$ hledáme bázi $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, tj. bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 6 \\ 6 & -3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tu tvoří např. vektor $x_2 = (2, -3)^T$.

Matice A má tedy vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (3, 2)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = -7$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (2, -3)^T$. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně – každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

(b) Charakteristický polynom matice B je

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(2 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Tento polynom má pouze komplexní kořeny, a to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i.$$

Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 1 + i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0 - (1 + i) & 1 \\ -2 & 2 - (1 + i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra najdeme (stejně jako pro reálné matice) pomocí Gaussovy eliminace. Přičtením $(-1 + i)$ -násobku 1. řádku k 2. řádku dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 + (-1 - i)(-1 + i) & 1 - i + 1(-1 + i) \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 + 2 & 1 - i - 1 + i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všechna řešení soustavy $(B - \lambda_1 I_2)x = 0$ jsou ve tvaru $z(1, 1 + i)$ pro $z \in \mathbb{C}$. Hledaným vlastním vektorem je tedy např. vektor $x_1 = (1, 1 + i)^T$. Druhý vlastní vektor x_2 pro $\lambda_2 = 1 - i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0 - (1 - i) & 1 \\ -2 & 2 - (1 - i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + i & 1 \\ -2 & 1 + i \end{pmatrix},$$

je to např. vektor $x_2 = (1, 1 - i)^T$.

Matice B má tudíž vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (1, 1 + i)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (1, 1 - i)^T$.

- (c) Postupujeme obdobně jako u matic 2×2 . Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2 - \lambda)(-3 - \lambda)(-2 - \lambda) + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\ &\quad - 2 \cdot (-3 - \lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2 - \lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2 - \lambda) \\ &= -(\lambda + 1)^3. \end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3 - (-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1, 1, -1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1, 1, -1)^T$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristický polynom matice A opět dostaneme jako determinant

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Pro vyjádření determinantu této matice je výhodné použít Laplaceův rozvoj, např. podle 2. řádku (obsahuje jediný nenulový prvek), následně podle 4. řádku a nakonec podle 3. sloupce. Tím dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2 - \lambda)(1 - \lambda)(1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2 - \lambda)(1 - \lambda)^3(1 + \lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy 2, 1 (trojnásobné) a -1 .

Cv. 7.4 Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_5 všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Postupujeme obdobně jako v předchozích úlohách. Charakteristický polynom matice A je

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 2 \\ 4 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2.$$

Jelikož pracujeme s charakteristickým polynomem v konečném tělese \mathbb{Z}_5 , které obsahuje pouze 5 prvků, můžeme kořeny polynomu efektivně najít prostým dosazením. Snadno ověříme, že platí $p_A(1) = 0$ a $p_A(2) = 0$, tedy vlastní čísla matice A jsou 1 a 2.

Dále najdeme odpovídající vlastní vektory jako bázi $\text{Ker}(A - 1I_3)$ a $\text{Ker}(A - 2I_3)$, tedy bázi jádra pro matice

$$\begin{pmatrix} 4 - 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 - 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 - 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 - 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 - 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 - 2 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem nad \mathbb{Z}_5 zjistíme, že první matici odpovídá báze jádra např. $\{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T\}$ a druhé matici báze $\{(1, 3, 4)^T\}$.

Matice A má tedy vlastní vektory $(1, 0, 1)^T$, $(0, 1, 0)^T$ příslušné vlastnímu číslu 1 a vlastní vektor $(1, 3, 4)^T$ příslušný vlastnímu číslu 2.

Cv. 7.5 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:

K řešení úlohy můžeme využít znalost vztahů mezi součinem vlastních čísel a determinantem matice, respektive mezi součtem vlastních čísel a stopou matice:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \quad \text{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Výpočet determinantu je pracnější, ale i využití tohoto vztahu vede k řešení. Determinant matice A můžeme spočítat např. Gaussovou eliminací, dostaneme $\det(A) = -420$. Pro zbylé vlastní číslo potom platí

$$\det(A) = -420 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot \lambda_4,$$

tedy $\lambda_4 = -420 / (-60) = 7$.

Výhodnější je ale použít vztah mezi součtem vlastních čísel a stopou matice. Stopa matice je součet prvků na diagonále, tedy

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^4 a_{ii} = 10 + 5 + 15 - 19 = 11.$$

Protože je stopa matice zároveň rovná součtu vlastních čísel, platí pro zbylé vlastní číslo

$$\lambda_4 = 11 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 11 - 3 + 4 - 5 = 7.$$

Cv. 7.6 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory x_1, \dots, x_n . Dokažte, že pak platí:

- (a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (c) matice $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Řešení:

- (a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$.
Chceme ukázat, že λ_i^2 je vlastní číslo matice $A^2 = AA$ s odpovídajícím vlastním vektorem x_i , tedy, že platí rovnost $A^2 x_i = \lambda_i^2 x_i$. S využitím vztahu $Ax_i = \lambda_i x_i$ dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A(Ax_i) = A(\lambda_i x_i) = \lambda_i(Ax_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

- (b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že matice αA má vlastní číslo $\alpha\lambda_i$ a příslušný vlastní vektor x_i , tedy $(\alpha A)x_i = (\alpha\lambda_i)x_i$. Platí:

$$(\alpha A)x_i = \alpha(Ax_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i.$$

- (c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že pro matici $A + \alpha I_n$ platí rovnost $(A + \alpha I_n)x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i$. Podobně jako v předchozích částech dostaneme:

$$(A + \alpha I_n)x_i = Ax_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

- (d) Pro důkaz této části můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T , má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A .

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 7.7 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Řešení:

Bud' x vlastní vektor matice A . Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2 , přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.