

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\text{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$

(d) $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem \mathbb{C} . Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Najděte nad tělesem \mathbb{Z}_5 všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.5 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopačítejte zbylé vlastní číslo.

Cv. 7.6 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory x_1, \dots, x_n . Dokažte, že pak platí:

- (a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (c) matice $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory x_1, \dots, x_n ,
- (d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Cv. 7.7 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.