8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Aby vše fungovalo, musí být matice S regulární, tedy matice A_1 musí mít n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Spočtěme tedy vlastní čísla matice A_1. Charakteristický polynom matice A_1 je

$$p_{A_1}(\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

Vlastní čísla se tedy rovnají $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Příslušné vlastní vektory získáme vyřešením homogenní soustavy rovnic $(A_1 - \lambda I) = 0$, kde za λ dosadíme postupně konkrétní vlastní čísla. Vyjdou tedy vektory $x_1 = c \cdot (1, 0, 2)^T$, $x_2 = c \cdot (1, 1, 1)^T$ a $x_3 = c \cdot (0, 0, 1)^T$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Matice A_1 je tedy diagonalizovatelná a můžeme ji napsat ve tvaru SDS^{-1}, kde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupujeme stejně jako u matice A_1 jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice A_2 se rovná $p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu p_{A_2} jsou $1+i$ a $1-i$ a k nim příslušné vlastní vektory $(1, 1+i)^T$ a $(1, 1-i)^T$. Matici A_2 tedy můžeme naspat ve tvaru SDS^{-1} pro matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice B má vlastní číslo 0 s algebraickou násobností 2. Pokud by tedy byla diagonalizovatelná, pak by musela být podobná nulové matici. Tedy pro nějako regulární matici S,

$$B = S0S^{-1} = 0.$$

Cv. 8.3 Pro diagonalizovatelnou matici C spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Mějme $C = SDS^{-1}$ pro diagonální matici D. Všimněme si, že

$$C^k = \left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}.$$

Obdobně $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} \cdot SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = SDS^{-1}$, kde $D^{\frac{1}{2}}$ je diagonální matice, kde jsou na diagonále odmocniny diagonálních prvků matice D, tedy $D^{\frac{1}{2}}_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$.

Třetí mocninu matice C tedy spočteme jako SD^3S^{-1} a odmocninu jako $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1}$.

Nejprve musíme zkonstruovat rozklad matice do tvaru SDS^{-1}:

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = SDS^{-1}.$$

Nyní již můžeme spočítat třetí mocninu a druhou odmocninu

$$SD^3S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix} = C^3,$$

$$SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = C^{\frac{1}{2}}.$$

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $S = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} i & \frac{1+i}{2} \\ -i & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$.