(8b) Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Příklad 8b.1. Buď $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polynom a $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ podobné matice. Je matice $p(A)$ podobná matici $p(B)$?

Řešení:
Ano, pro matice $A \sim B$ platí také $p(A) \sim p(B)$. Z definice podobnosti existuje regulární matice S, pro kterou je $A = SBS^{-1}$, a tedy $A^k = SB^kS^{-1}$. Pro matice $p(A)$ a $p(B)$ pak platí vztah

$$\begin{aligned} p(A) &= a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \\ &= a_nSB^nS^{-1} + a_{n-1}SB^{n-1}S^{-1} + \cdots + a_0SIS^{-1} \\ &= S(a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_0I)S^{-1} = Sp(B)S^{-1}. \end{aligned}$$

Příklad 8b.2. Nechť $A = S\Lambda S^{-1}$ je diagonalizační rozklad matice A. Určete vlastní vektory matice A^T.

Řešení:
Pro matici A^T platí vztah

$$A^T = (S\Lambda S^{-1})^T = (S^{-1})^T \Lambda S^T,$$

dostaneme tedy diagonalizační rozklad $A^T = R\Lambda R^{-1}$ pro $R = (S^{-1})^T$. Vlastními vektory A^T jsou sloupce matice R, tedy řádky matice S^{-1}.

Příklad 8b.3. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou diagonalizovatelné matice. Jsou matice αA (pro $\alpha \in \mathbb{R}$), $A + B$ a $A \cdot B$ také diagonalizovatelné?

Řešení:

(a) Matice αA má stejné vlastní vektory jako matice A, je tedy dle Věty 10.32 také diagonalizovatelná.

(b) Matice $A + B$ nemusí být diagonalizovatelná. Např. matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ jsou diagonalizovatelné, ale jejich součet $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ není.

(c) Matice $A \cdot B$ nemusí být diagonalizovatelná. Např. matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ jsou diagonalizovatelné, ale jejich součin $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ není.