11. Positivně (semi-)definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Řešení:

(a) Rekurentní vzorec nám říká, že symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \widetilde{A} \end{pmatrix}$$

je positivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a matice $\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T$ positivně definitní. Aplikací dostáváme matici menší dimenze

$$\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} (-2, 4) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Označme $B = \widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} aa^T$ a aplikujme vzorec ještě jednou. Dostáváme $\widetilde{B} - \frac{1}{\beta} bb^T = 5 - \frac{1}{9} 3 \cdot 3^T = 4$. Pro matici v prostoru $\mathbb{R}^{1\times 1}$ víme, že je positivně definitní právě tehdy, když je kladná, což zřejmě hodnota 4 splňuje.

(b) Stačí nám zkontrolovat, že determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné. To jsou matice, která vzniknout z matice A vyškrtnutím posledních $n-i$ řádků pro $i = 1, \ldots, n$. Musíme proto spočítat determinanty následujících matic, které odpovídají hlavním vedoucím podmaticím:

$$(4), \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Těm odpovídají popořadě kladné hodnoty $4, 36, 36$, tedy matice A je positivně definitní.

(c) Při provádění Gaussovy eliminace musíme mít na paměti, že máme povolenou pouze operaci přičítání α násobku řádku k řádku pod ním. Důvod najdeme v důkazu příslušného tvrzení, ze kterého je zřejmé, že využíváme vlastnosti rekurentního vzorce. Pokud nejprve odečteme příslušné násobky prvního řádku od ostatních a následně násobek druhého od třetího řádku, dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Ta má kladnou diagonálu, tedy se jedná o positivně definitní matici.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) Pro výpočet vlastních čísel využijeme vztahů $\lambda_1\lambda_2 = det(B)$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = trace(B)$ z tvrzení 10.12. Dostáváme $\lambda_1\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Řešením je tedy dvojice $0, 2$. Podle věty 10.8 je matice B positivně semidefinitní.

(b) Stejným postupem jako v předchozí variantě dostáváme vlastní čísla $-1, 3$. Matice C je tedy tzv. indiferentní.

(c) Vlastní čísla jsou $3, 1$, tedy podle věty 11.7 je matice positivně definitní.

Cv. 11.3 Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická positivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ představuje skalární součin.

Řešení:
Ukážeme nejprve, že pro A symetrickou positivně definitní matici je zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ skalární součin:

- Positivní definitnost $\langle x, y\rangle_A$ dostáváme z positivní definitnosti A, protože $\langle x, y\rangle_A = x^T Ax \geq 0$ a rovnost nastává právě pro $x = 0$.
- Symetrii dostáváme taktéž ze symetrie A, platí totiž $\langle x, y\rangle_A = x^T Ay = y^T A^T x = y^T Ax = \langle x, y\rangle_A$. Druhá rovnost platí proto, že transpozice reálného čísla je rovna číslu samotnému (tj. $x^T Ax = (x^T Ax)^T$). Třetí rovnost platí právě díky symetrii matice A.
- Linearita plyne z faktu, že matice A a maticové násobení reprezentují lineární zobrazení, tedy

$$\langle x + y, z\rangle_A = (x + y)^T Az = x^T Az + y^T Az = \langle x, z\rangle_A + \langle y, z\rangle_A$$

a zároveň

$$\langle \alpha x, y\rangle_A = (\alpha x)^T Ay = \alpha(x^T Ay) = \alpha\langle x, y\rangle_A.$$

Při důkazu opačným směrem je třeba ukázat symetrii a positivní definitnost matice A:

- Protože je skalární součin symetrický, platí $x^T Ay = y^T Ax$. Protože výraz $x^T Ay$ je reálné číslo, aplikací transpozice dostáváme to samé číslo, tedy $x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x$. Kombinací obou rovností dostáváme, že $y^T A^T x = y^T Ax$ a tedy $A = A^T$.
- Positivní definitnost plyne z triviálně z vlastnosti $x^T Az = \langle x, z\rangle_A \geq 0$, kde rovnost nastane pro $x = 0$.

Cv. 11.4 Ukažte, že matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická positivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

<u>Řešení:</u>
Aby F byla positivně definitní, musí zobrazení $\langle x, y\rangle_F = x^T Fy$ být skalární součin. Roznásobme tedy výraz $x^T Fy$ pro obecné vektory $x = (x_1, x_2)^T$ a $y = (y_1, y_2)^T$. Dostáváme

$$x^T Fy = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

- Positivní definitnost platí, protože

  $$\begin{aligned}\langle x, x\rangle_F &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\\ &= 2\big((x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2\big) \geq 0.\end{aligned}$$

  Rovnost dostáváme, pokud $(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0$. Protože se jedná o součet dvou druhých mocnin, rovnost nastává právě tehdy, pokud jsou obě druhé mocniny nulové, tedy právě tehdy, když $(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 = 0$ a $\frac{3}{4}x_2^2 = 0$. Z druhé rovnosti vychází $x_2 = 0$ a dosazením do první taktéž $x_1 = 0$.
- Symetrii zobrazení dostaneme snadno z prohození prostředních členů x_1y_2, x_2y_1 a komutativity násobení reálných čísel,

  $$\langle x, y\rangle_F = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = 2y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2 = \langle y, x\rangle_F.$$

- Podobně ze základních pravidel operací nad reálnými čísly dostáváme linearitu součtu

  $$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle_F &= 2(x_1 + y_1)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2\\ &= (2x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 2x_2z_2) + (2y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + 2y_2z_2)\\ &= \langle x, z\rangle_F + \langle y, z\rangle_F\end{aligned}$$

  i součinu

  $$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle_F &= 2(\alpha x_1)y_1 - (\alpha x_1)y_2 - (\alpha x_2)y_1 + 2(\alpha x_2)y_2\\ &= \alpha(2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) = \alpha\langle x, y\rangle_F.\end{aligned}$$

  Ukázali jsme, že zobrazení $\langle x, y\rangle_F$ je skalární součin, tedy podle tvrzení z předchozí úlohy je F symetrická positivně definitní.

Cv. 11.5 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Řešení:
Ukážeme postupně, že $\preccurlyeq$ splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

- Pro každou matici A je výraz $A \preccurlyeq A$ ekvivalentní tomu, že $A - A = 0_n$ je positivně semidefinitní. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T 0_n x = 0$, tedy 0_n je positivně semidefinitní a $\preccurlyeq$ je reflexivní.
- Pokud pro dvojici matic A, B platí, že $A \preccurlyeq B$ a zároveň $B \preccurlyeq A$, znamená to, že obě matice $B - A$ i $A - B$ jsou positivně semidefinitní matice. Tedy pro libovolný vektor x platí, že $x^T(B - A)x \geq 0$ a také $x^T(A - B)x \geq 0$, neboli $x^T Bx - x^T Ax \geq 0$ a $x^T Ax - x^T Bx \geq 0$. To můžeme upravit na $x^T Bx \geq x^T Ax$ a zároveň $x^T Ax \geq x^T Bx$, z čehož plyne, že $x^T Ax = x^T Bx$. Protože jsme zvolili libovolné x, platí to pro všechny vektory, čímž dostáváme rovnost $A = B$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy antisymetrická.
- Mějme matice A, B, C takové, že $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq C$. Tedy $M = B - A$ a $N = C - B$ jsou positivně semidefinitní matice. Všimněme si, že $M + N = (B - A) + (C - B) = C - A$. Pokud je tedy $M + N$ positivně semidefinitní, potom platí, že $A \preccurlyeq C$. Protože ale pro každé x platí $x^T Mx \geq 0$ a $x^T Nx \geq 0$, také $x^T(M + N)x = x^T Mx + x^T Nx \geq 0$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy transitivní.