

11. Positivně (semi-)definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte pozitivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

- (a) rekuretního vzorce,
- (b) Sylvestrova pravidla,
- (c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte pozitivní semidefinitnost resp. pozitivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Cv. 11.3 Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická pozitivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$ představuje skalární součin.

Cv. 11.4 Ukažte, že matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická pozitivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

Cv. 11.5 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relaci \preceq předpisem $A \preceq B$ pokud $B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že \preceq je relace částečného uspořádání.