

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte pozitivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Pro každou pozitivně definitní matici existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$ (Choleského rozklad). K dokázání pozitivní definitnosti matice A nám tedy stačí nalézt takovou matici L .

Při konstrukci postupujeme stejně jako algoritmus ze skript. Protože je L dolní trojúhelníková, víme, že část prvků tvoří nuly.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} = LL^T$$

Určíme nejprve prvek ℓ_{11} . Protože prvek a_{11} je dán maticovým násobením prvního řádku matice L s prvním sloupcem matice L^T (který odpovídá prvnímu řádku), můžeme zapsat $a_{11} = \ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ell_{13}^2$. Prvky ℓ_{12} , ℓ_{13} se nicméně rovnají nule, tedy platí $4 = a_{11} = \ell_{11}^2$ a proto $\ell_{11} = 2$ (fakticky máme dvě možnosti: 2 a -2, ale hodnotu 2 volíme proto, že L musí mít kladnou diagonálu).

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že když budeme pokračovat v násobení prvního řádku L se zbylými sloupci L^T , kvůli nulám v prvním řádku dostáváme rovnici $a_{1k} = (L)_{11}(L^T)_{1k} = 2\ell_{k1}$. Díky té snadno určíme prvky v prvním sloupci L jako $\ell_{k1} = \frac{a_{1k}}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \bullet & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Pokračujeme výpočtem ℓ_{22} . Podobně jako při určování předchozího diagonálního prvku, dostáváme vynásobením druhého řádku a druhého sloupce rovnici $10 = a_{22} = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ell_{23}^2 = (-1)^2 + \ell_{22}^2 + 0^2$. Po úpravě dostáváme $\ell_{22}^2 = 9$ a tedy $\ell_{22} = 3$ kvůli pozitivitě diagonály.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Díky tomu, že druhý řádek matice L je kompletní, můžeme dopočítat podobně jako předtím i druhý sloupec L .

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Celý cyklus opakujeme ještě jednou pro třetí sloupec matice L . Nejprve spočítáme diagonální prvek $\ell_{33} = 1$ a poté i ostatní prvky v třetím sloupci (žádné už nejsou). Dostáváme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Matice A je tudíž pozitivně definitní.

Uvědomme si dále, že jsme v průběhu konstrukce nikdy neměli na vybranou, jaký prvek pro libovolné ℓ_{ij} zvolit. Jediná situace byla, když jsme určovali diagonální prvky, ale protože diagonála musí být kladná, měli jste stejně jen jedno řešení. Tedy matice L je skutečně dána jednoznačně.

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou pozitivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice A a B jsou pozitivně definitní a jejich Choleského rozklad je

$$A = L_A L_A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = L_B L_B^T = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Matice C naopak není pozitivně definitní.

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Protože je matice E pozitivně definitní, lze rozložit do tvaru $E = LL^T$. Pro její inverzi tedy platí $E^{-1} = (LL^T)^{-1} = L^{-T}L^{-1}$. Místo počítání inverze přímo tedy můžeme spočítat nejprve Choleského rozklad, následně inverzi dolní trojúhelníkové matice L a na závěr vzniklou inverzi L^{-1} vynásobíme s její transpozicí.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takovýto postup může být někdy výpočetně méně náročný, než počítat inverzi matice E přímo.

Cv. 12.4 Spočítejte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -32 \\ 26 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice U pro hledaný rozklad $A = U^T U$ je

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme substituci $Ux = y$. Tedy $b = Ax = U^T Ux = U^T y$. Soustava $U^T y = b$ má řešení $y = (10, 1, -2, 3, 2)^T$. Nyní již můžeme vyřešit soustavu $Ux = y$ a zjistíme, že výsledné řešení je $x = (1, 1, -2, 0, 1)^T$.

Protože matice obou soustav jsou v odstupňovaném tvaru, stačí provést jen dvakrát zpětnou substituci.

Cv. 12.5 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Choleského rozklad matice je $A = LL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobným postupem jako v předchozím příkladu vyřešíme soustavu a dostaneme řešení $x = (1, 2, 0, -1)^T$.

Cv. 12.6 Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.

Řešení:

První způsob:

Pro sudé mocniny: $x^T A^k x = x^T A^{\frac{k}{2}} I A^{\frac{k}{2}} x = y^T I y \geq 0$.

Pro liché mocniny: $x^T A^k x = x^T A^{\frac{k-1}{2}} A A^{\frac{k-1}{2}} x = y^T A y \geq 0$.

Druhý způsob: Protože matice A je pozitivně semidefinitní, má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Matice A^k má vlastní čísla jejich k -té mocniny $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$, které jsou taky nezáporné. Tudíž A^k je pozitivně semidefinitní.

Cv. 12.7 Buď A pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $x^T Ax = 0$ pro nějaké $x \neq 0$ implikuje $Ax = 0$.

Řešení:

Matice A má (symetrickou) pozitivně semidefinitní odmocninu B , tj. $A = B^2$. Můžete tedy psát $x^T Ax = x^T B^T Bx = y^T y$ pro $Bx = y$. Z předpokladu je $y^T y = 0$, z čehož $y = 0$ a $Bx = 0$. Pokud obě strany vynásobíme maticí B , dostaneme $Ax = B^2 x = 0$.