13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1y_2 + x_2$,
(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Řešení:

(a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u, w) + \beta a(v, w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u + \beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w, u) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u, v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v, u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x, y) = [x]_B^T A\, [y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bází B. Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x, y) = x^T Ay = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

(b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1 u_2 + \beta w_1 v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w,u) + \beta b(w,v)$. Forma b tedy není bilineární.

(c) Pokusme se nalézt matici C reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T C y = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Snadno vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c tedy není bilineární.

(d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba vyřešit rovnici

$$x^T D y = \mathbf{d_{11}}x_1y_1 + \mathbf{d_{12}}x_1y_2 + \mathbf{d_{21}}x_2y_1 + \mathbf{d_{22}}x_2y_2 = \mathbf{1}x_1y_1 + \mathbf{1}x_1y_2 + \mathbf{2}x_2y_2.$$

Vyřešením rovnice dostáváme matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická.

(e) V tomto případě musíme postupovat pouze z definice. Linearita v první složce

$$e(\alpha U + \beta V, W) = (\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW = \alpha e(U,W) + \beta e(V,W)$$

platí díky linearitě maticového násobení. Obdobně tomu je i s linearitou v druhé složce.

Aby platila symetrie, musela by platit komutativita maticového násobení, tedy $e(X,Y) = XY = YX = e(Y,X)$. To víme, že obecně neplatí, tedy zobrazení e je bilineární forma, která není symetrická.

Cv. 13.2 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x,y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x,x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x,x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= \mathbf{b_{11}}x_1^2 + \mathbf{2b_{12}}x_1x_2 + \mathbf{b_{22}}x_2^2 = \mathbf{3}x_1^2 + \mathbf{5}x_1x_2 + \mathbf{5}x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2{,}5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x, y) = x^T By = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cv. 13.3 Buď $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnost* kvadratické formy b definujeme jako $\operatorname{rank}(b) := \operatorname{rank}(B)$. Dokažte, že $\operatorname{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Řešení:
Různé maticové reprezentace odpovídají různým bázím, v jejichž souřadnicích pracujeme. Tedy pokud A_1 a A_2 jsou maticové reprezentace formy b vůči bázím B_1 a B_2, potom platí

$$b(x, y) = [x]_{B_1}^T A_1 [y]_{B_1} = [x]_{B_2}^T A_2 [y]_{B_2}.$$

Dále víme, že matice A_1 a A_2 jsou svázány vztahem takzvané *kongruence*, který udává přechod mezi reprezentacemi $A_1 = S^T A_2 S$. Matice S je zde maticí přechodu $S = {}_{B_2}[id]_{B_1}$.

Uvažujme tedy dvě maticové reprezentace A_1 a A_2 formy b. Protože matice přechodu S i S^T jsou regulární, zachovává se při maticovém násobení hodnost. Platí proto, že

$$\operatorname{rank}(A_2) = \operatorname{rank}(S^T A_2 S) = \operatorname{rank}(A_1),$$

tedy nutně dvě maticové reprezentace stejné kvadratické formy mají stejnou hodnost. Proto $\operatorname{rank}(b)$ je dobře definovaná ve smyslu, že není závislá na volbě maticové reprezentace.

Cv. 13.4 Buď $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g.

Řešení:
Díky vlastnostem bilinearity můžeme nejprve *sloučit informaci* o vektorech x a y, tedy vzít $x + y$, a následným aplikováním g na $x + y$ dostáváme

$$g(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y).$$

Nyní odečteme *dílčí informace* o jednotlivých vektorech, tedy $g(x) = b(x, x)$ a $g(y) = b(y, y)$ a dostáváme,

$$g(x, y) - g(x, x) - g(y, y) = b(x, y) + b(y, x) = 2b(x, y).$$

Algebraickou úpravou dostáváme výsledné vyjádření

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\big(g(x, y) - g(x, x) - g(y, y)\big).$$

Všimněme si, že nebýt symetrie, tak náš postup selže, neboť linearita nebude dostatečně silná na to, abychom rozlišili $b(x, y)$ a $b(y, x)$.