14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Matici diagonalizujeme prováděním řádkových a sloupcových úprav (po provedení jedné řádkové úpravy provedeme vždy identickou sloupcovou úpravu).

První úprava v následujícím postupu je odečtení prvního řádku od druhého, po kterém následuje odečtení prvního sloupce od druhého. Dále přičteme dvojnásobek prvního řádku (sloupce) ke třetímu a nakonec dvojnásobek druhého řádku (sloupce) ke třetímu.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výsledná matice je v diagonálním tvaru s dvěma kladnými a jedním záporným prvkem na diagonále, její signatura je tedy $(2, 1, 0)$.

Cv. 14.2 Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření

$$g((w, x, y, z)^T) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2.$$

Určete její signaturu.

Řešení:
Z analytického vyjádření formy sestavíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Na tuto matici aplikujeme postup s řádkovými a sloupcovými úpravami a převedeme ji na diagonální tvar.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3/2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3/2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(Pozor, úprava na druhém řádku je odečtení čtvrtého řádku a sloupce od druhého.)

Výsledná signatura formy je $(1, 2, 1)$.

Cv. 14.3 V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí B a s maticí C

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & a & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Řešení:
Nyní již řádkovou a odpovídající sloupcovou úpravu provedeme najednou.

Pro matici B:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & a-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

Pro matici C:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & a & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & a-4 & -6\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a-4 & -6\\ 0 & -6 & -9\end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a-4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Signatury obou forem jsou tedy stejné a závisí na znaménku parametru a (závislost je triviální, přesný výsledek zde nevypisujeme).

Cv. 14.4 Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

positivně definitní.

Řešení:
Symetrická matice této formy vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Forma je positivně definitní právě tehdy, když její matice je positivně definitní. To ověříme Sylvestrovým kritériem:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 1, \\ \det(A_2) &= 1, \\ \det(A_3) &= 4 \end{aligned}$$

Všechny determinanty jsou kladné, matice je positivně definitní a tedy i daná kvadratická forma.

Cv. 14.5 Mějme dánu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma positivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Řešení:

Matice formy se od předchozí liší jen nepatrně,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření positivní definitnosti vyjdou první dva determinanty stejně jako v předchozím příkladu, stačí tedy vypočítat pouze

$$\det(A_3) = -a^2 + 2a + 3 = -(a - 3)(a + 1).$$

Jeho hodnota bude kladná pro $a \in (-1, 3)$, takže matice A, resp. kvadratická forma g, je positivně definitní právě tehdy, když a leží v intervalu $(-1, 3)$.

Kvadratická forma g nemůže být negativně definitní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, neboť $g((1, 0, 0)^T) = 1 > 0$ nezávisle na volbě parametru a.

Cv. 14.6 Najděte polární bázi reálné kvadratické formy $g((x, y, z)^T) = 2xz - 2xy$ a určete její signaturu.

Řešení:

Postup je podobný jako při diagonalizaci matice kvadratické formy, jenom je nutné „pamatovat“ si použité úpravy. Převádíme-li A na diagonální matici S^TAS pomocí řádkových a sloupcových úprav, pak matice S^T je vlastně součin matic provedených elementárních úprav a matice S je součinem (stejných) sloupcových úprav.

Je-li na začátku výpočtu matice A maticí kvadratické formy vzhledem ke kanonické bázi, pak dle věty o matici kvadratické formy při změně báze je výsledná S^TAS maticí stejné formy vůči bázi B pro kterou je $S = {}_{\text{kan}}[id]_B$ a tedy B je báze tvořená sloupci matice S. Polární báze je taková, vůči níž je matice kvadratické formy diagonální, tedy máme-li převod A na diagonální tvar S^TAS, pak sloupce matice S tvoří hledanou polární bázi.

Proto, abychom S spočítali, stačí postupně aplikovat sloupcové úpravy použité při diagonalizaci A na jednotkovou matici (na A aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy, ale pomocí S si „pamatujeme" jenom ty sloupcové, řádkové jsou reprezentovány maticí S^T, ale tu počítat nemusíme).

Konkrétně pro danou kvadratickou formu $g((x, y, z)^T) = 2xz - 2xy$ určíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tu diagonalizujeme spolu s jednotkovou maticí, na kterou ale aplikujeme jenom sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k prvnímu, na pravé straně jenom sloupec)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k druhému)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

(odečteme polovinu prvního řádku a sloupce od posledního)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(spíše z estetických důvodů nakonec vynásobíme poslední řádek a sloupec dvěma, prvek na pozici $(3, 3)$ se tak vynásobí 4).

Polární báze je tvořena sloupci matice S (pravá strana ve výpočtu), to jest vektory

$$(1, 0, 1)^T, \ (0, 1, 1)^T, \ (-1, 0, 1)^T$$

a signatura formy je $(1, 1, 1)$.

Cv. 14.7 Najděte polární bázi kvadratické formy $g((x, y, z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Řešení:

Postup je shodný s postupem v předchozím příkladu, pouze ho provádíme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Matice dané kvadratické formy (vzhledem ke kanonické bázi) je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní diagonalizujeme pomocí řádkových a sloupcových úprav a na pravé straně provádíme pouze sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Z výsledné matice určíme polární bázi

$$(1,0,0)^T,\ (3,1,0)^T,\ (0,3,1)^T.$$