

1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v \mathbb{R}^4 spočítejte pro vektory $x = (1, 1, 1, 1)^T$ a $y = (1, 2, 4, 2)^T$:

- skalární součin $\langle x, y \rangle$,
- normy $\|x\|$, $\|y\|$,
- vzdálenost x od y .

Řešení:

- Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x^T y = \sum_{i=1}^4 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 9.\end{aligned}$$

- Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2, \\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, y \rangle} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2} = 5.\end{aligned}$$

- Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(0, -1, -3, -1)^T\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v \mathbb{C}^3 spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$ a $y = (1 - i, 1, 1)^T$:

- skalární součin $\langle x, y \rangle$,
- normy $\|x\|$, $\|y\|$,
- vzdálenost x od y .

Řešení:

- Podle definice standardního skalárního součinu je

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{y}_i = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3 = \\ &= 1 \cdot (1 + i) + 3i \cdot 1 + (1 + 5i) \cdot 1 = 2 + 9i.\end{aligned}$$

- Podle definice eukleidovské normy

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\langle x, \bar{x} \rangle} = \sqrt{x^T \bar{x}} = \sqrt{1 + 3i(-3i) + (1 + 5i)(1 - 5i)} = 6, \\ \|y\| &= \sqrt{\langle y, \bar{y} \rangle} = \sqrt{y^T \bar{y}} = \sqrt{(1 - i)(1 + i) + 1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

- (c) Vzdálenost mezi vektory (body) x, y je definovaná jako norma jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(i, -1 + 3i, 5i)^T\| = 6.$$

- Cv. 1.3** Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1, 5, 2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Řešení:

Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je kolmý na vektor y , pokud $0 = \langle x, y \rangle = x_1 + 5x_2 + 2x_3$. Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$ a geometricky tvoří rovinu v prostoru \mathbb{R}^3 . Báze je tvořena například vektory $(5, -1, 0)^T, (2, 0, -1)^T$.

Pokud úvahu zobecníme, tak množina vektorů kolmých na daný vektor $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ je charakterizována jednou rovnicí. Geometricky tato množina představuje nadrovinu v prostoru \mathbb{R}^n , tedy je podprostor dimenze $n - 1$.

- Cv. 1.4** Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru \mathbb{R}^2 :

- (a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
 (b) $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
 (c) $\langle x, y \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
 (d) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

- (a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T, y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y \rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x \rangle,$$

- (b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = -1$, což není kladná hodnota.
 (c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x \rangle = 0$ což není kladná hodnota.
 (d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2 \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když

$$x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{a zároveň} \quad x_2 = 0.$$

To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.

- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2, \\ \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2) \\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2). \end{aligned}$$

- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y \rangle &= \alpha x_1 y_1 + 2\alpha x_1 y_2 + 2\alpha x_2 y_1 + 5\alpha x_2 y_2, \\ \alpha \langle x, y \rangle &= \alpha(x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2).\end{aligned}$$

- Symetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2, \\ \langle y, x \rangle &= y_1 x_1 + 2y_1 x_2 + 2y_2 x_1 + 5y_2 x_2.\end{aligned}$$

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

- Nad \mathbb{R} dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Najděte protipříklad nad \mathbb{C} , kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

- Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y \rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

- Protipříklad nad \mathbb{C} : Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x + y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\text{trace}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- Ukažte, že $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
- Dokažte $\text{trace}(A)^2 \leq n \cdot \text{trace}(A^T A)$.

Řešení:

- Pišme

$$\text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^n (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A^T)_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} b_{ji}.$$

Čili výraz $\text{trace}(A^T B)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$