1. Skalární součin, norma

Standardní a nestandardní skalární součin

Cv. 1.1 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^4$ spočítejte pro vektory $x = (1,1,1,1)^T$ a $y = (1,2,4,2)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.2 Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1+5i)^T$ a $y = (1-i, 1, 1)^T$:

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Cv. 1.3 Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na vektor $y = (1,5,2)^T$? Dokážete závěr zobecnit?

Cv. 1.4 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Norma indukovaná skalárním součinem

Cv. 1.5 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ platí právě tehdy, když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 1.6 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Pro tento skalární součin zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \leq n \cdot \operatorname{trace}(A^TA)$.

Cv. 1.7 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$